第9章　曲线积分与曲面积分

9.1　曲线积分

9.1.1 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

9.1.2 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

9.1.3 两类曲线积分之间的关系

9.1.1 对弧长的 曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

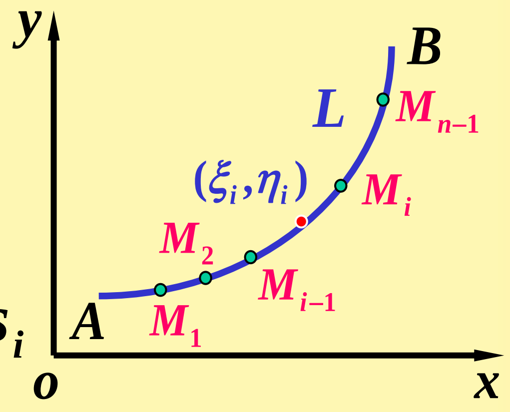
1. 曲线型物体的质量

设一曲线型细长构件，在xoy面上占有一段曲线弧L,端点为A,B,在AB上任一点的线密度为$\rho(x,y)$,求这构件的质量。

用元素法:

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad (\xi_i,\eta_i)\in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$$

$$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$



2. 对弧长的曲线积分的定义

2、定义 设L为xOy面内的一条光滑曲线弧，函数$f(x,y)$在L上有界。 在L上任意插入一点$M_1,M_2\ldots M_n$把L分成 n个小段，

设第i个小段的长度为Δs_i，又(ξ_i,η_i)为第i个小段上任意取定的一点，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，并作和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

如果当各个小段的长度的最大值$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)ds$

即 $$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x，y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段。

依上定义，有 $M=\int_L \rho(x,y)ds$ $S=\int_L ds$

3. 几点说明

（1）$f(x, y)$在L上连续，则$\int_L f(x,y)ds$存在。

（2）定义可推广到空间的曲线Γ上的曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$$

（3）如L是光滑的或分段光滑的简单闭曲线，常记作：

$$\oint_L f(x,y)ds$$

4. 对弧长的曲线积分的性质

（1）关于被积函数的线性性质

$$\int_L [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)] ds = k_1 \int_L f(x,y) ds + k_2 \int_L g(x,y) ds$$

（2）对于路径的可加性

$$\int_L f ds = \int_{L_1} f ds + \int_{L_2} f ds$$ 其中$L=L_1+L_2$

（3）无方向性

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f ds$$

（4）对称性

1)　如L关于y轴对称，L_1是L的右半支，则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & 若 f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\int_{L_1} f ds, & 若 f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

当L关于x轴对称时有类似的结论。

2)　如L关于$y=x$对称，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}[\int_L f(x,y)ds+\int_L f(y,x)ds]$$

二、对弧长的曲线积分的计算方法

1. 定理

设$f(x, y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$存在，

且$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta)$

计算方法：化为对参数的定积分，“一代二换三定限”

“一代”：将$x=\varphi(t), y=\psi(t)$，代入被积函数$f(x, y)$;

“二换”：将ds换成 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

“三定限”：下限小上限大。

2. 几种变形

(1) 如L：$y=y(x)$，$a\le x\le b$则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

(2) 如L：$x=x(y)$， $c\le y\le d$则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy$$

(3) 如L：$\rho=\rho(\theta)$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$

$$\alpha\le\theta\le\beta$$

(4) 如 Γ： $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\cdots]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

$$\alpha\le t\le\beta$$

3．举例

例1　计算$\oint_L \sqrt{y}ds$．L：$y=x^2$，$y=x$所围区域的边界。

解：

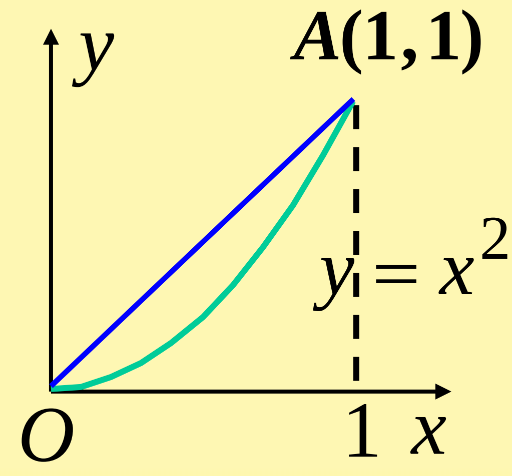
$$I=\oint_L \sqrt{y}\,ds=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overset{\frown}{OA}}$$

$$=\int_0^1 \sqrt{y}\cdot\sqrt{1+1}\,dy+\int_0^1 \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{8}\int_0^1(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)$$

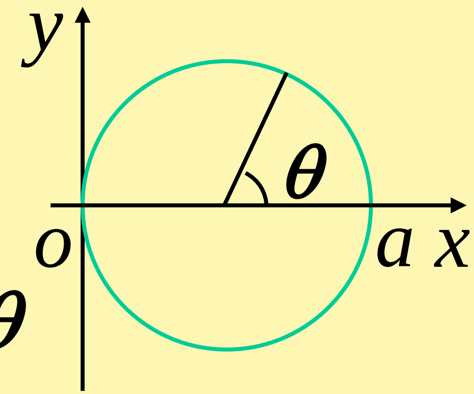
$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)=\frac{13}{12}\sqrt{5}-\frac{1}{12}$$



例2　计算$\oint_L (x^2+y^2)ds$，其中$L: x^2+y^2=2ax$

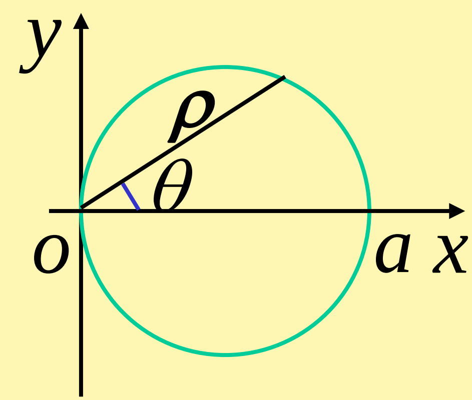
解：$L:\begin{cases} x = a(1+\cos\theta), & 0\le\theta\le 2\pi \\ y = a\sin\theta, & ds=ad\theta \end{cases}$



$$I=\oint_L 2axds \ =\int_0^{2\pi} 2a^2(1+\cos\theta)\cdot ad\theta$$

$$=2a^3(\theta+\sin\theta)\big|_0^{2\pi}=4\pi a^3$$

注：(1) 可用极坐标计算。



$$L:\rho=2a\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=2ad\theta$$

$$\oint_L (x^2+y^2)ds=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 ad\theta \ =8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2\theta d\theta=4\pi a^3$$

(2) 如何计算$\oint_L (x^2+y^2+\sin y)ds$，其中$L: x^2+y^2=2ax$

例3 计算曲线积分$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$

其中 Γ为螺旋线$x=a\cos t$、$y=a\sin t$、$z=kt$上相对于t从0到2 π的一段弧

解: $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例4 计算$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$，其中

（1）Γ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$

（2）Γ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=a$

解 (1) $I=\int_{\Gamma}a^2ds=a^2\int_{\Gamma}ds=2\pi a^3$

(2) $I=\int_{\Gamma}a^2ds=a^2\int_{\Gamma}ds=a^2\cdot 2\pi r$

$$d=\frac{a}{\sqrt{3}}\qquad r=\sqrt{a^2-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a\qquad I=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a^3$$

问题：如上例(1)中被积函数是x^2（或y^2或z^2）应如何做？

即：如何计算$\oint_{\Gamma}(x^2+x)ds$？

$$\oint_{\Gamma}(x^2+x)ds=\frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds+\frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x+y+z)ds$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}a^2ds+\frac{1}{3}\int_{\Gamma}0ds=\frac{a^2}{3}\int_{\Gamma}ds=\frac{2}{3}\pi a^3$$

例5 计算$\int_{\overline{AB}}(3x-2y+z)ds$， $A(0,1,1)$， $B(1,3,-1)$

解：$\vec{AB}=\{1,2,-2\}$. 则$\overline{AB}$的方程为：

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

$\overline{AB}$ 的参数方程为$x=t$，$y=1+2t$，$z=1-2t$。$(0\le t\le 1)$

$$I=\int_0^1[3t-2(1+2t)+(1-2t)]\cdot\sqrt{1+4+4}dt$$

$$=3\int_0^1(-3t-1)dt=-3\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)\Big|_0^1=-\frac{15}{2}$$

三. 对弧长的曲线积分的应用

（1） 弧长 $s = \int_L ds$

设一曲线型细长构件，在xoy面上占有一段曲线弧L,端点为A,B,在AB上任一点的线密度为$\rho(x,y)$,

（2）质量 $M = \int_L \rho(x,y)ds$

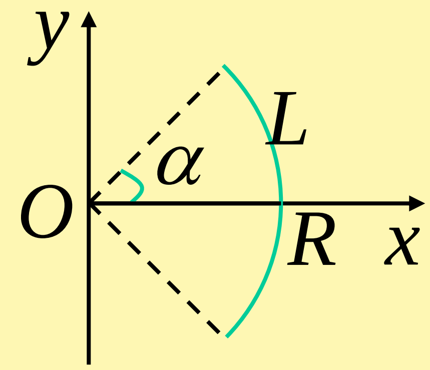
（3）质心 $\bar{x} = \dfrac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds}$ $\bar{y} = \dfrac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}$

（4）转动惯量

$$I_x = \int_L y^2\rho(x,y)ds, \quad I_y = \int_L x^2\rho(x,y)ds$$

例7. 计算半径为 R ,中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度$\mu = 1$).

解: 建立坐标系如图, 则



$$I = \int_L y^2 ds$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta \quad = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

内容小结

1. 定义 $$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$$

2. 性质

（1）关于被积函数的线性性质

（2）对于路径的可加性

（3）对称性

3. 计算方法：化为对参数的定积分“一代二换三定限”

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$$

习题9—1：