9.1.2 对坐标的曲线积分

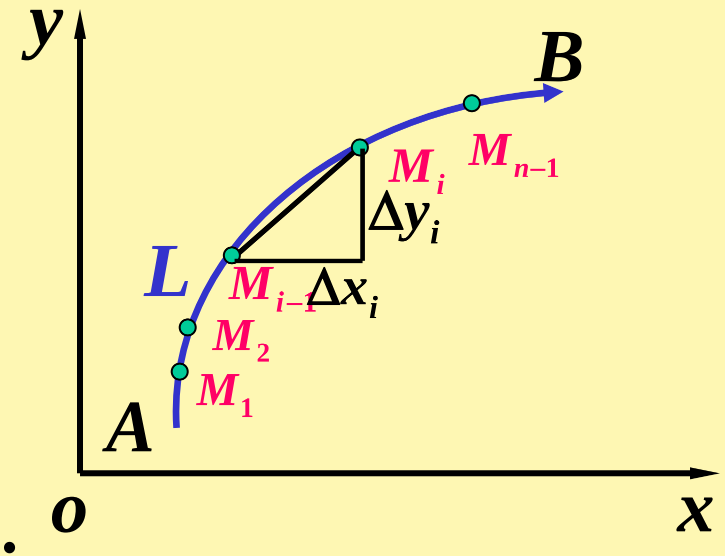
一、对坐标的曲线积分的概念与性质

1 实例：变力沿曲线所作的功

$$L: A \to B,$$

$$\overrightarrow{F(x,y)} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

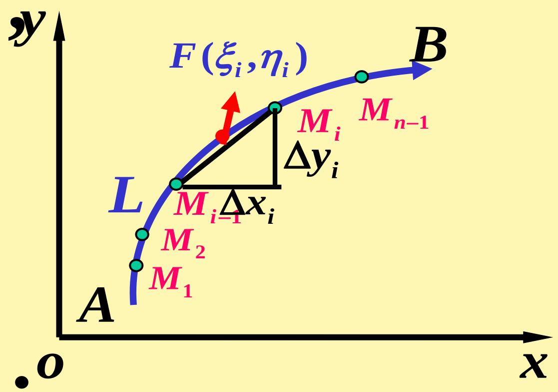
常力沿直线所作的功 $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$



分割 $A = M_0, M_1(x_1, y_1), \cdots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n = B.$

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}.$$

取 $\vec{F}(\xi_i,\eta_i)=P(\xi_i,\eta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\vec{j}$,



近似 $\Delta W_i \approx \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$,

即 $\Delta W_i \approx P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

求和 $$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i$$

近似值

$$\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$$

取极限 $$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$$

精确值

2．对坐标的曲线积分的定义

定义 设L为xOy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$在L上有界。在L上沿L的方向任意插入一点列$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\dots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$把$L$分成$n$个有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$

$(i=1,2,\dots,n;\ M_0=A,\ M_n=B)$

设$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

点 (ξ_i,η_i) 为弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点。如果当各小弧段长度的最大值$\lambda\to0$时，

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

的极限总存在，则称此极限为函数$P(x, y)$在有向曲线弧L上对坐标x的曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx$

即 $$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

类似地，如果极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$总存在

则称此极限为函数$Q(x，y)$在有向曲线弧L上对坐标y的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)dy$

即 $$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

其中$P(x,y)$、$Q(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段。

以上两个积分也称为第二类曲线积分。

3. 几点说明

（1）可积性　当$P(x,y)$，$Q(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，第二类曲线积分存在.

（2）组合型 $\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$

$$=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L \vec{F}\cdot\vec{ds}.$$

其中 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$，　$\vec{ds}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$.

（3）物理意义

变力$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$

沿曲线L所作的功　$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

（4）可推广到空间曲线的情形

空间有向曲线弧Γ $\quad \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i .$$

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i .$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i .$$

4．性质

（1）关于被积函数的线性性质

$$\int_L [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)]dx$$

$$= k_1 \int_L f(x,y)dx + k_2 \int_L g(x,y)dx$$

（2）关于曲线积分路径的可加性

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

其中$L=L_1+L_2$（方向一致）

（3）方向性 $\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy$

即对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

二、对坐标的曲线积分的计算方法

1. 定理

定理 设$P(x, y)$、$Q(x, y)$在有向曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$
当参数t单调地由α变到β时，点$M(x, y)$从L的起点A沿L运动到终点B。 $\varphi(t), \psi(t)$ 在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$，则曲线积分
$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$总存在，且
$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$
这里下限 α 对应于L的起点，上限 β 对应于L的终点。

计算方法：化为对参数的定积分，“一代二定限”

“一代”：将$x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 代入被积式。

“二定限”：下限 $\alpha\to$起点，上限 $\beta\to$终点，不一定有 $\alpha<\beta$

2．几种情形

（1）L由$y=y(x)$给出时，将x视作参数

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]\cdot y'(x)\}dx$$

a对应L的起点，b对应L的终点。

（2）L由$x=x(y)$给出时，将y视作参数。

（3）对于空间曲线

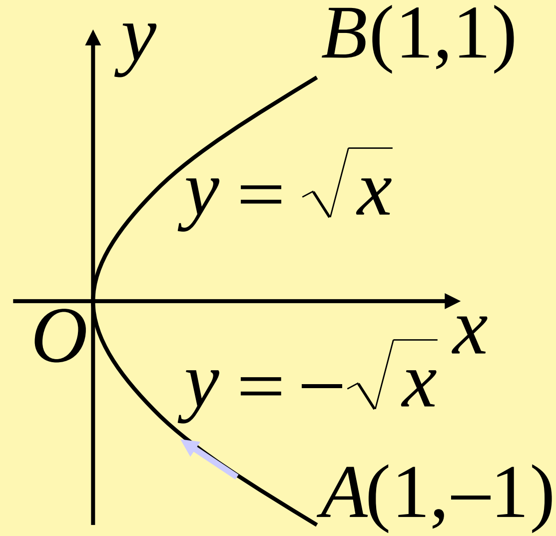
$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\cdots]\varphi'(t)+Q[\cdots]\psi'(t)+R[\cdots]\omega'(t)\}dt$$

例1 计算$\int_L xydx$ 其中L为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧（如图）

解：第一种方法：化为对x的定积分来计算.

$$\int_L xydx = \int_{AO} xydx + \int_{OB} xydx$$



$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}.$$

第二种方法：化为对y的定积分来计算。

$$\int_L xydx = \int_{-1}^{1} y^2 y(y^2)'dy$$

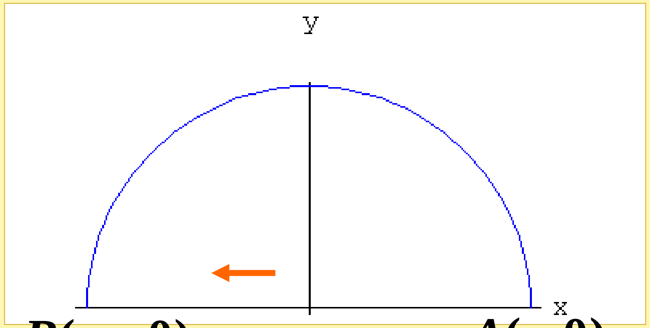
$$= 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = 2[\frac{y^2}{5}]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解 (1) $L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}, \theta : 0 \to \pi$



$$\text{原式} = \int_0^\pi a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = -\frac{4}{3}a^3.$$

(2) $L: y = 0,\quad x : a \to -a,$

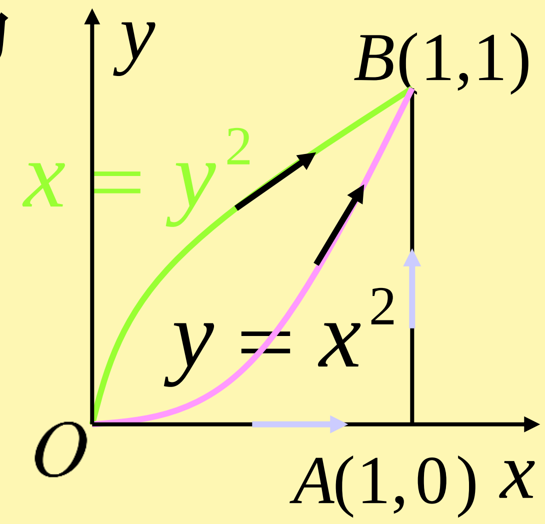
$$\text{原式} = \int_a^{-a} 0dx = 0$$

例3. 计算 $\int_L 2xy\,dx + x^2 dy$，其中L为

(1) 抛物线 $L: y = x^2$, 从O到B;

(2) 抛物线 $L: x = y^2$, 从O到B ;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,dx = 4\int_0^1 x^3 dx = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,dy = 5\int_0^1 y^4 \mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,dx + x^2 dy + \int_{\overline{AB}} 2xy\,dx + x^2 dy$

$= 0 + \int_0^1 dy = 1$

例4. 求$I=\int_{\Gamma}(z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(x-y)\,dz$，其中

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$，从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程 $x=\cos t,\ y=\sin t,$

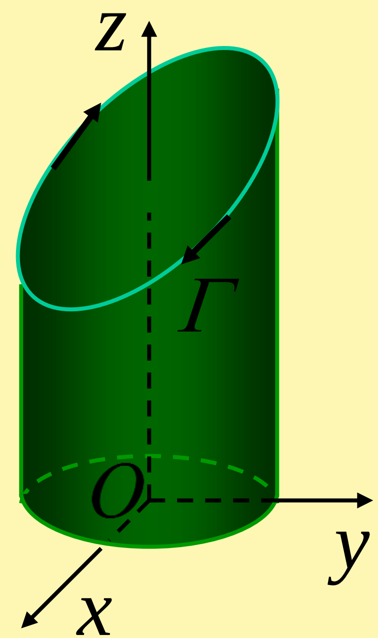
$$z=2-\cos t+\sin t \quad (t:2\pi\to 0)$$

$$\therefore \quad I=-\int_0^{2\pi}[(2-\cos t)(-\sin t)$$

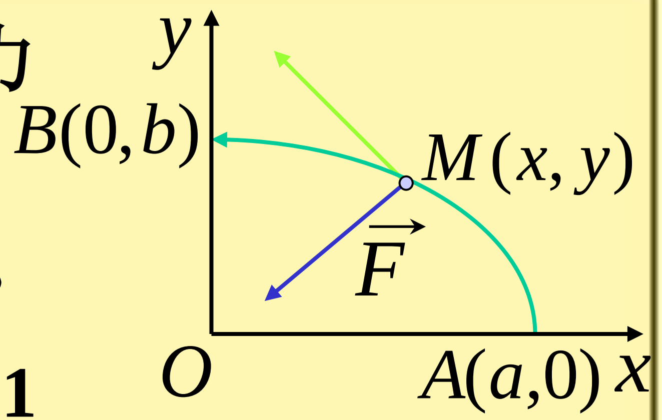
$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,dt=-2\pi$$



例5 设一个质点在$M(x, y)$处受到力F的作用，F的大小与M到原点O的距离成正比，F的方向恒指向原点。此质点由点$A(a,0)$沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$按逆时针方向移动到点$B(0, b)$，求力$F$所作的功$W$。



解：
$$\vec{F}^0=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}i-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j$$

$$|\vec{F}|=k\sqrt{x^2+y^2}$$ $k>0$是比例常数。

$$\vec{F}=|\vec{F}|\vec{F}^0=-k(x\vec{i}+y\vec{j})$$

$$W=\oint_{AB}-kxdx-kydy=-k\oint_{AB}xdx+ydy$$

利用椭圆的参数方程：$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} t:0\to\dfrac{\pi}{2}$

$$W=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t)dt$$

$$=k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=\frac{k}{2}(a^2-b^2)$$

三、两类曲线积分之间的联系

设有向曲线弧L的起点为A，终点为B。曲线弧L由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

给出，起点A 、终点B分别对应参数 α、 β。

由对坐标的曲线积分计算公式有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

有向曲线弧L的切向量T的方向规定与L的方向一致。如L的方向对应于参数t增加的方向（即上式中$\alpha<\beta$），则 $\vec{T}=\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$

反之则$\vec{T}=-\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$，它的方向余弦为

$$\cos\theta=\pm\frac{\phi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\qquad \cos\tau=\pm\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

(当 $\alpha<\beta$时取正号， $\alpha>\beta$时取负号)

当$\alpha<\beta$时，

考虑 $\int_L[P(x,y)\cos\theta+Q(x,y)\cos\tau]ds$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$+Q[\cdots,\cdots]\cdot\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\}\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$$=\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

当$\alpha>\beta$时， $$\int_{L}[P(x,y)\cos\theta+Q(x,y)\cos\tau]ds$$

$$=\int_{\beta}^{\alpha}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\frac{-\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)}}+$$

$$Q[\cdots,\cdots]\cdot\frac{-\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)}}\}\cdot\sqrt{\varphi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)}dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$$=\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

一般地，平面曲线L上的两类积分之间有如下联系：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\theta + Q\cos\tau)ds$$

$$T^{\circ} = \{\cos\theta, \cos\tau\} = \pm\left\{\frac{\phi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}$$

(当 $\alpha<\beta$时取正号， $\alpha>\beta$时取负号)

类似地可知，空间曲线Γ上两类曲线积分之间有如下联系

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是有向曲线 Γ上点$(x，y，z)$处的切向量的方向余弦。

例1 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化成对弧长的曲线积分，L：沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0，0)到点(2，0)

解：方法1：取x为参变量

$L: y=\sqrt{2x-x^2}$　起点对应$x=0$，终点$x=2$

$$T=\left\{1,\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right\}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}}=\sqrt{2x-x^2}\qquad \cos\beta=(1-x)$$

所以

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L[P(x,y)\cdot\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)]ds$$

方法2：L：$x=1+\cos\theta$，$y=\sin\theta(0\le\theta\le\pi)$

起点 $\theta=\pi$，终点 $\theta=0$。

$$T=-\{\varphi'(\theta),\psi'(\theta)\}=\{\sin\theta,-\cos\theta\}$$

所以

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L[P(x,y)\sin\theta+Q(x,y)(-\cos\theta)]ds$$

$$=\int_L[P(x,y)y+Q(x,y)(1-x)]ds$$

内容小结

1. 定义 $$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

2. **性质**

（1）关于被积函数的线性性质

（2）对于路径的可加性

3. 计算方法：化为对参数的定积分“一代二定限”

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

NJUPT

4. 两类曲线积分之间的关系:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

习题9一2