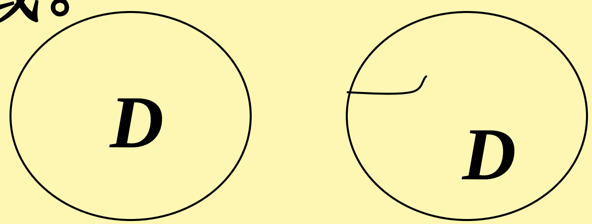
9.2　格林公式及其应用

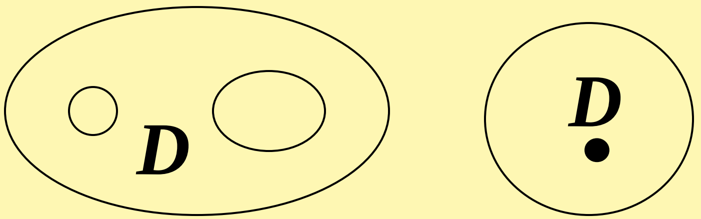
9.2.1、格林公式

1．单连域与复连域

设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域。

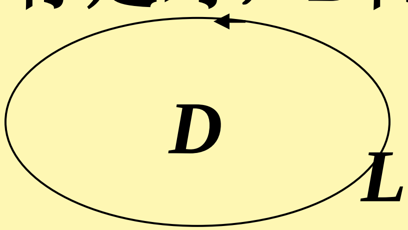


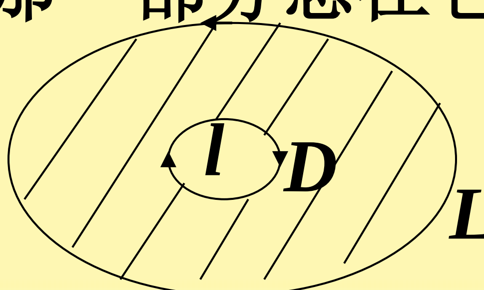
单连域



复连域

D的边界曲线L的正向规定如下：当观察者沿L的这个方向行走时，D内在他近处的那一部分总在它的左边。





2. 格林公式

定理1 设闭区域D由光滑或分段光滑的曲线L围成，函数P（x，y）及Q（x，y）在D上具有一阶连续偏导数，则有

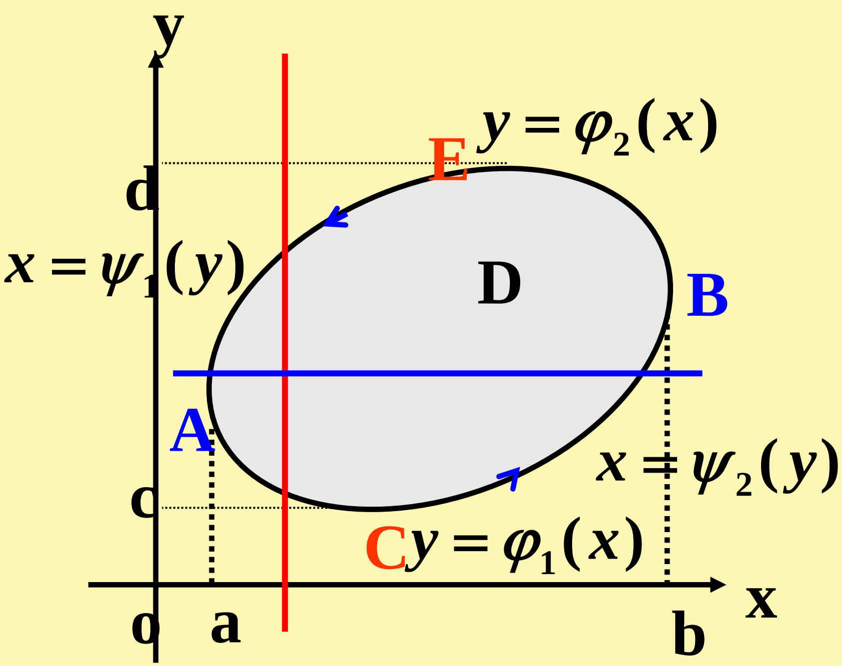
$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1)$$

其中L是D的取正向的边界曲线。

公式（1）叫做格林公式。

证明(1)

若区域D既是$X-$型又是$Y-$型,即平行于坐标轴的直线和L至多交于两点.



$$D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}$$

$$D=\{(x,y)|\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

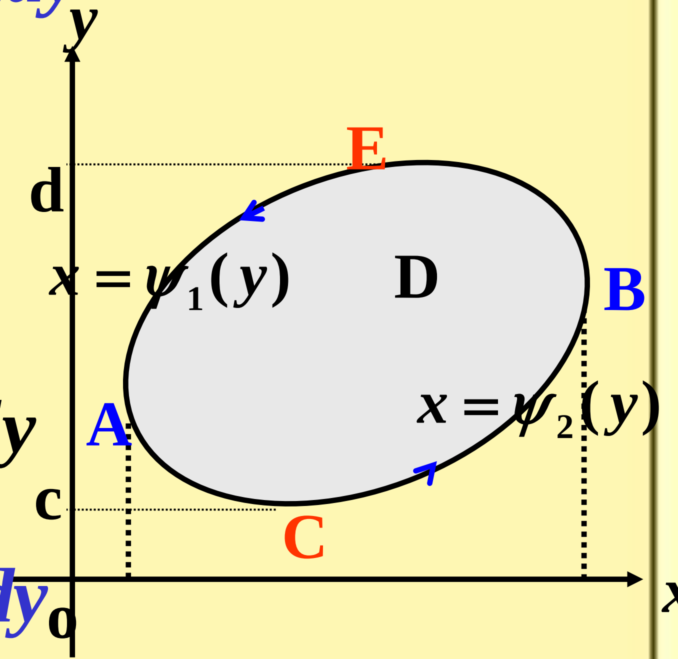
$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)dy$$

$$\oint_L Q(x, y)dy$$

$$= \int_{CBE} Q(x, y)dy + \int_{EAC} Q(x, y)dy$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy + \int_d^c Q(\psi_1(y), y)dy$$

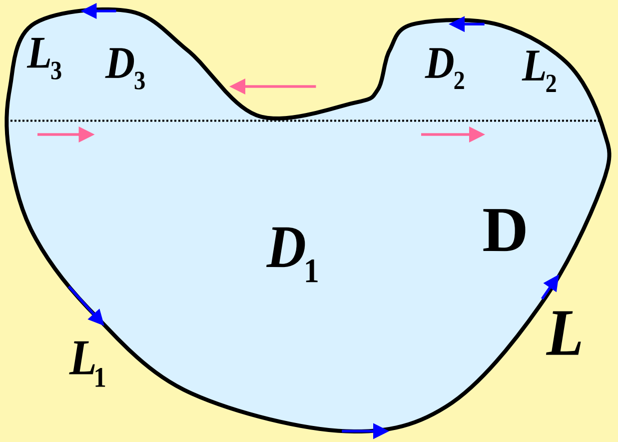
$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)dy$$



$$\Rightarrow \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x, y)dy$$

同理可证 $$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L P(x, y)dx$$

两式相加得 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$



证明(2) 若区域 D 由按段光滑的闭曲线围成. 如图,

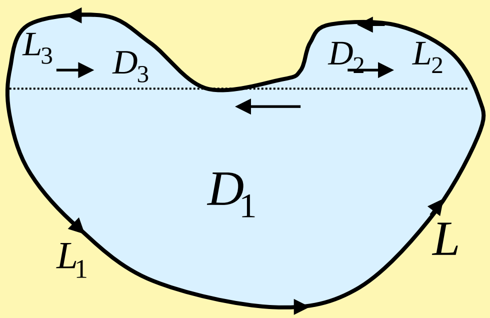
将 D 分成三个既是 X −型又是 Y −型的区域 D_1, D_2, D_3.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_1+D_2+D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

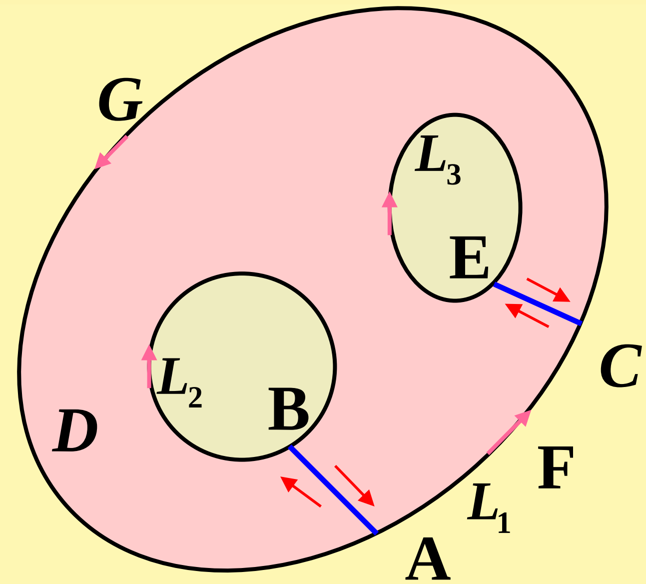
$$=\oint_{L_1}Pdx+Qdy+\oint_{L_2}Pdx+Qdy+\oint_{L_3}Pdx+Qdy$$

$$=\oint_{L}Pdx+Qdy$$



$(L_1, L_2, L_3$对D来说为正方向$)$

证明(3) 若区域不止由一条闭曲线所围成. 添加直线段 AB, CE. 则 D 的边界曲线由 AB, L_2, BA, AFC, CE, L_3, EC 及 CGA 构成.



由(2)知 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{L_2}+\int_{BA}+\int_{AFC}+\int_{CE}+\int_{L_3}+\int_{EC}+\int_{CGA}\right\}\cdot(Pdx+Qdy)$$

$$=\left(\oint_{L_2}+\oint_{L_3}+\oint_{L_1}\right)(Pdx+Qdy)$$

$$=\oint_L Pdx+Qdy \quad (L_1, L_2, L_3\text{对}D\text{来说为正方向})$$

格林公式的实质: 沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系.

3．格林公式的应用举例。

(1)．计算平面面积

例1 $\oint_L -ydx + xdy = \iint_D [1-(-1)]dxdy = 2\iint_D dxdy = 2A,$

$A = \dfrac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy.$ 这里L为D的正向边界

当D的边界曲线由参数方程得出时，由上式可求D的面积。

例如 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$的面积:$A = \dfrac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy.$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) + a\cos\theta\cdot b\cos\theta]d\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab$$

(2). 简化曲线积分

例2　L是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的逆时针方向,

求$\oint_L [3y+x^2]dx+(2x+\sin y)dy$

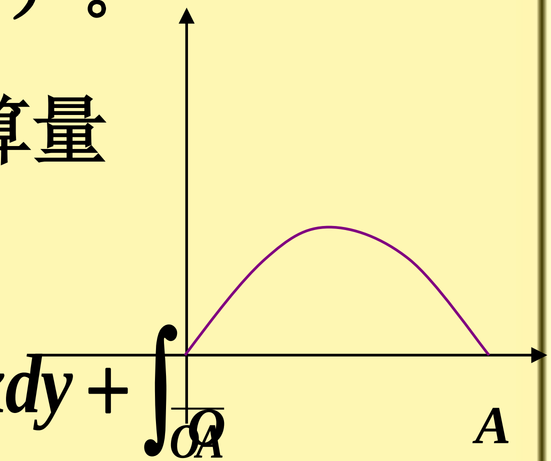
解　利用格林公式

$$\oint_L [3y+x^2]dx+(2x+\sin y)dy$$

$$=\iint_D [2-3]dxdy=-\iint_D dxdy=-2\pi$$

例3　计算$I=\int_L e^x(1-\cos y)dx+e^x(\sin y-1)dy$,

L：$y=\sin x$从O（0，0）到A（π，0）。



解：可直接化为对x的定积分，但计算量较大。这里用格林公式。

$$\int_{\overset{\frown}{OA}} = \oint_{\overset{\frown}{OA}+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \int_{\overline{OA}}$$

$$= -\iint_D [e^x(\sin y-1)-e^x\sin y]dxdy + 0$$

$$= \int_0^{\pi} dx\int_0^{\sin x} e^x dy = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$= \frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}.$$

1. 计算$I=\int_L e^x(1-\cos y)dx+e^x(\sin y-1)dy$,

L：$y=\sin x$从O（0，0）到A（π，0）。

2. 计算$I=\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$

Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$的上侧

3. 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$x-1$的幂级数

4. 将$\dfrac{e^z}{z^3}$在$0<|z|<+\infty$内展开成$Laurent$级数.

1. 计算$I=\int_L e^x(1-\cos y)dx+e^x(\sin y-1)dy$,

L：y=sinx从O（0，0）到A（π，0）。

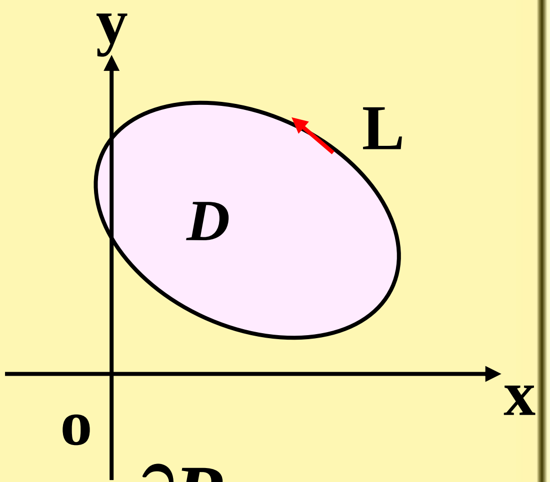
2. 计算$I=\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$

Σ： $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$的上侧

3. 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$x-1$的幂级数

4. 将$\dfrac{e^z}{z^3}$在$0<|z|<+\infty$内展开成$Laurent$级数.

例 4 计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，$L$的方向为逆时针方向.



解 记L所围成的闭区域为D，

令$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，

则当$x^2+y^2\neq 0$时，有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

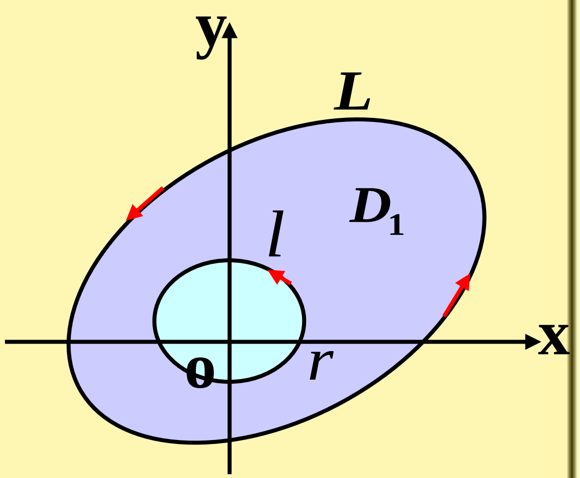
(1) 当$(0,0)\notin D$时，

由格林公式知 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

(2) 当$(0,0)\in D$时，

作位于D内圆周 l：$x^2+y^2=r^2$，

记D_1由L和l所围成，



应用格林公式，得

$$\oint_{L+(-l)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

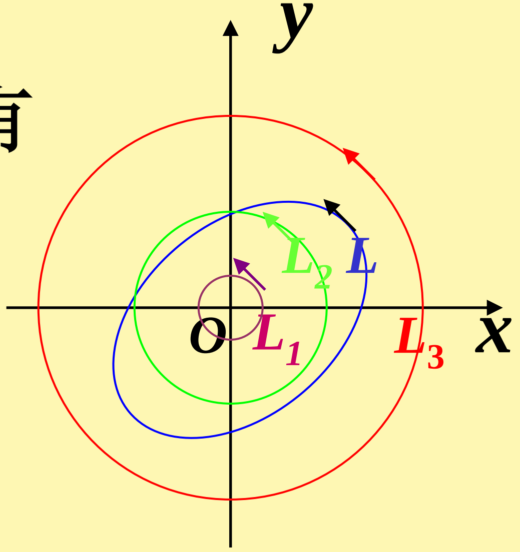
(其中l的方向取逆时针方向)

即：$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi.$$

注　此例中所作的辅助圆l是否一定要是D内的圆周（即r充分小）？



说明：如 除点（0，0）外，处处有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad 则 \quad \oint_L=\oint_{L_1}=\oint_{L_2}=\oint_{L_3}$$

小结：

（1）若在D上P、Q一阶偏导连续，L为封闭曲线

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$ 简单，可直接用格林公式计算

$$\oint_L Pdx+Qdy.$$

（2）L不封闭时，采取“补线”的方法：

$$\int_L = \oint_{L+l} - \int_l = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy - \int_l$$

要求右端的二重积分及曲线积分易于计算。l选用直线段、折线等。

（3）如在D上P、Q一阶偏导连续，且处处有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，

则 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

如D内除点$M_0(x_0, y_0)$外均有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则$\oint_L = \oint_l$

其中l是包围点(x_0, y_0)的与L同向的光滑的简单闭曲线，特别地l是以(x_0, y_0)为中心的圆、椭圆等.

例5 计算$I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}, C: x^2+y^2=1,$

C取逆时针方向。

解: $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2},$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(4x^2+y^2)-x\cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

除原点外处处有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$

取L：$4x^2+y^2=r^2$,逆时针方向，则

$$I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_L=\frac{1}{r^2}\oint_L xdy-ydx=\frac{2}{r^2}\iint_{D'} dxdy=\pi$$

或利用椭圆的参数方程直接计算。

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},\theta:0\to 2\pi$$

$$\oint_c=\oint_L=\frac{1}{r^2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}r\cos\theta dr\sin\theta-r\sin\theta d\frac{1}{2}r\cos\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta)d\theta)=\pi$$

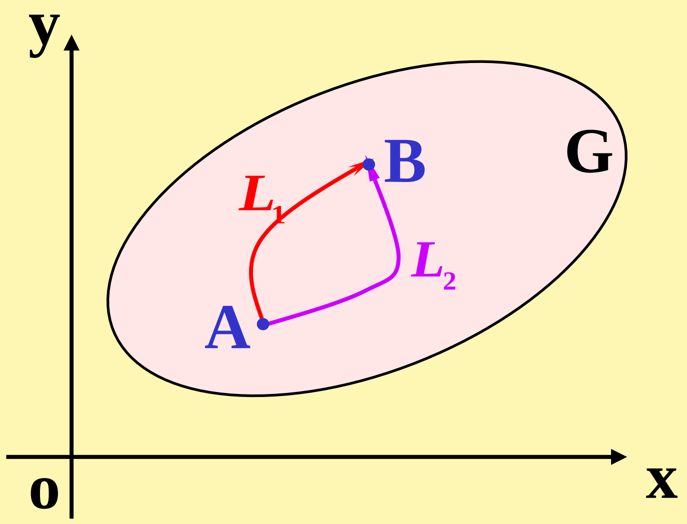
9.2.2、曲线积分与路径无关的条件

1、什么叫曲线积分与路径无关

如果在区域G内有

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



则称曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$在G 内与路径无关,

否则与路径有关.

显然曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在G内与路径无关$\Leftrightarrow$

沿G内任意闭曲线C的曲线积分$\oint_c Pdx + Qdy = 0$

2、曲线积分与路径无关的条件

定理2 设开区域G是一个单连通域，函数P（x，y），Q（x，y）在G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在G内与路径无关（或沿G内闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (1)$$

在G内恒成立。

证明：充分性：在G内任取一条闭曲线C

因为G是单连通的，所以闭曲线C所围成的区域D全部在G内，应用格林公式，有

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

必要性：现在要证的是：如果沿G内任意闭曲线的曲线积分为零，那么（1）式在G内恒成立。

用反证法来证。假使上述论断不成立，那么G内至少有一点M_0，使 $$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}\neq 0.$$

不妨假定 $$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}=\eta>\frac{\eta}{2}>0.$$

由于$\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$在$G$内连续，可以在$G$内取得一个以$M_0$为圆心半径足够小的圆形闭区域$K$，使得在$K$上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geq\frac{\eta}{2}.$$

于是由格林公式及二重积分的性质就有

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{K} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \geq \frac{\eta}{2} \cdot \sigma.$$

这里的γ是K的正向边界曲线，σ是K的面积。因为

$\eta>0,\sigma>0$，从而 $\displaystyle\oint_{\gamma} Pdx + Qdy > 0.$

这结果与沿G内任意闭曲线的曲线积分为零的假定相矛盾，可见G内使（1）式不成立的点不可能存在，即（1）式在G内处处成立。证毕。

有关定理的说明：

(1)　开区域G是一个单连通域.

(2)　函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数.

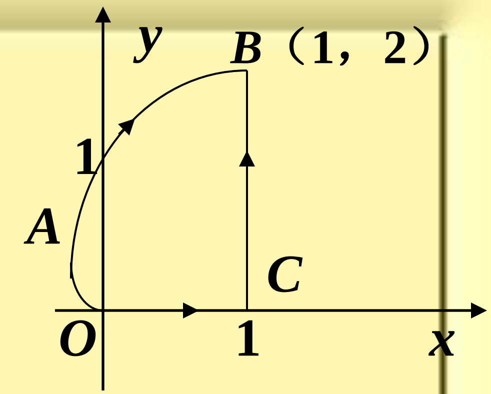
两条件缺一不可

如果这两个条件不能都满足，那么定理的结论不一定成立。如在前面的例4、例5中，除原点外恒有

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$　但沿包围原点的闭曲线L的积分

$$\int_L Pdx + Qdy \neq 0$$

例1 设L是以O（0，0）为起点，经A（0，1）到点B（1，2）的一段圆弧。试计算曲线积分



$$\int_L (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy.$$

解：$P = e^y + x, \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^y;\ Q = xe^y - 2y, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^y;$

$$\int_L = \int_{\overline{OC}} + \int_{\overline{CB}} = \int_0^1 (1+x)dx + \int_0^2 (e^y - 2y)dy$$

$$= \frac{(1+x)^2}{2}\Big|_0^1 + (e^y - y^2)\Big|_0^2$$

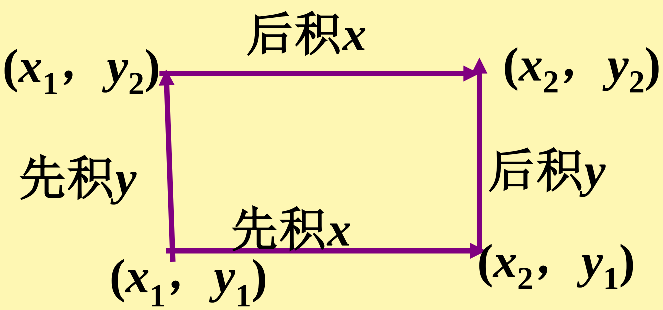
$$= (2 - \frac{1}{2}) + (e^2 - 4) - 1 = e^2 - \frac{7}{2}$$

此题可改成：验证曲线积分$\int_L (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$.

与路径无关，并计算$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$

注：若曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关，仅与起点$A(x_1, y_1)$终点$B(x_2, y_2)$的坐标有关，其中L是G内以A为起点，B为终点的任意光滑或分段光滑的曲线。

此时可记 $\int_L Pdx+Qdy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy$



$$=\int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)dx+\int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)dy$$

$$=\int_{y_1}^{y_2} Q(x_1,y)dy+\int_{x_1}^{x_2} P(x,y_2)dx$$

9.2.3、二元函数的全微分求积

1、$Pdx+Qdy$ 为某函数全微分的充要条件。

定理3 设开区域G是一个单连通区域，函数$P(x, y)$、$Q(x, y)$在G内具有一阶连续偏导数，则$P(x, y)dx+Q(x, y)dy$在G内为某一函数$u(x, y)$的全微分的充分必要条件是等式 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (1) 在G内恒成立。

证明：先证必要性。假设存在某一函数$u(x, y)$，使得

$$du=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

则必有 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

由于P、Q具有一阶连续偏导数，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$连续，

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \text{即} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

这就证明了条件（1）是必要的。

再证充分性。设已知条件（1）在内G恒成立，

则起点为$M_0(x_0, y_0)$终点为$M(x, y)$的曲线积分在区域G内与路径无关，于是可把这个曲线积分写作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

当起点$M_0(x_0, y_0)$固定时，这个积分的值取决于终点$M(x, y)$，因此，它是x、y的函数，把这函数记作$u(x, y)$，即

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \quad (2)$$

下面证明这函数$u(x,y)$的全微分就是

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$。

即只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

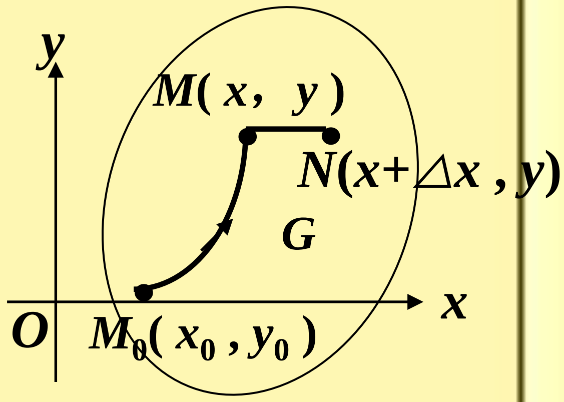
按偏导数的定义，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}$$

由（2）式，得

$$u(x+\Delta x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

由于这里的曲线积分与路径无关，可以先从M_0到M，然后沿平行于x轴的直线段从M到N作为上式右端曲线积分的路径（如图）。这样就有



$$u(x+\Delta x, y)=u(x,y)+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

从而

$$u(x+\Delta x, y)-u(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

因为直线段MN的方程为y=常数，按对坐标的曲线积分的计算法，上式成为

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=\int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y) dx$$

应用定积分中值定理，得

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=P(x+\theta \Delta x, y) \Delta x(0 \leq \theta \leq 1)$$

上式两端除以Δx，并令$\Delta x \to 0$取极限。由于$P(x，y)$的偏导数在G内连续，$P(x，y)$本身也一定连续，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y) \quad \text{同理可证} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y)$$

这就证明了条件（1）是充分的。证毕。

2、四个等价条件

设G是xOy平面上的单连通区域，P、Q在G内有连续的一阶偏导数，则以下4个条件等价

(i) $\oint_C Pdx + Qdy = 0$

C是G内任意的光滑或分段光滑的闭曲线。

(ii) $\int_L Pdx + Qdy$

与路径无关，仅与起点 $A(x_1, y_1)$终点$B(x_2, y_2)$的坐标有关，其中L是G内以A为起点，B为终点的任意光滑或分段光滑的曲线。

此时可记 $\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy$

（iii）在G内存在某可微的二元函数$u(x，y)$，使$du(x，y)=Pdx+Qdy$，即$Pdx+Qdy$在G内是某函数的全微分。这时也称$u(x，y)$是$Pdx+Qdy$的一个原函数。

则$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

（iv） $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$G$内处处成立。

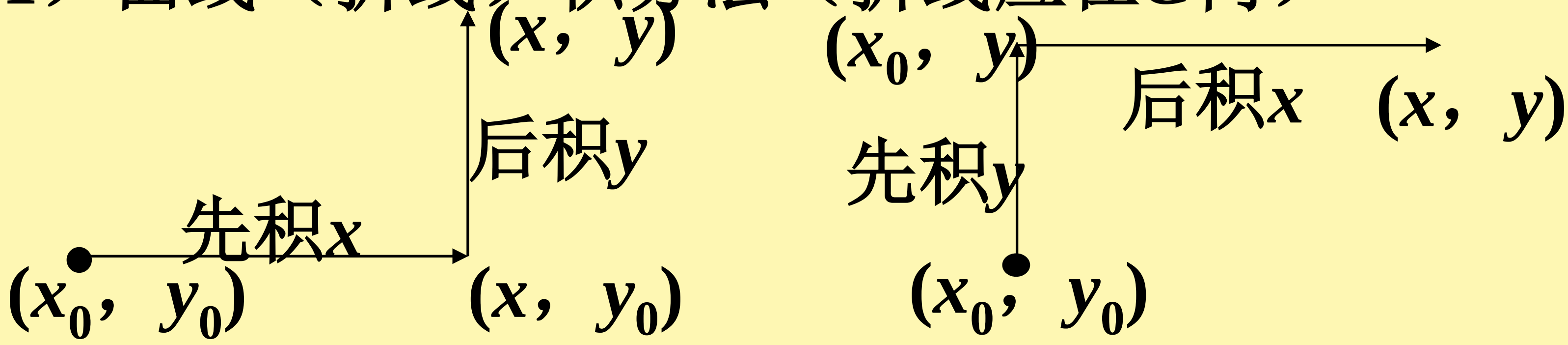
应特别注意结论成立的大前提条件：G是单连通域，P、Q一阶偏导连续。

3、二元函数的全微分求积

首先验证$Pdx+Qdy$是全微分，即检验P、Q在单连通域G内一阶偏导连续，且有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$u(x，y)$的求法通常有二种。

（1）曲线（折线）积分法（折线应在G内）



(x_0,y_0)是G内的一个定点,(x,y)是G内的任意点（动点）

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$

$$\underline{\underline{\text{先积}x}}\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

$$\underline{\underline{\text{先积}\,y}}\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$$

$u(x，y)=U(x，y)+C$

（2）凑微分法

例1：验证$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy$为某一函数的全微分，并求此函数

解法一 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$， 是某个函数的全微分

$$U(x,y)=\int_0^x x^3dx+\int_0^y (y^3-3x^2y)dy$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4},$$

所以 $$u(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+C.$$

解法二　　将方程左端重新组合

$$(x^3dx+y^3dy)-(3xy^2dx+3x^2ydy)$$

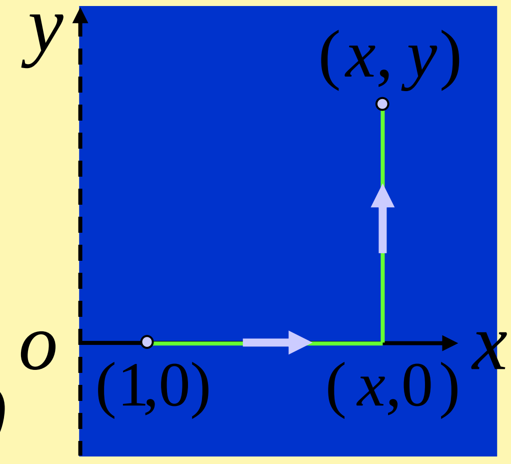
$$=(d\frac{1}{4}x^4+d\frac{1}{4}dy^4)-(\frac{3}{2}y^2dx^2+\frac{3}{2}x^2dy^2)$$

$$=d(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4)-(d\frac{3}{2}y^2x^2)$$

$$=d(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4-\frac{3}{2}y^2x^2)$$

所以　$$u(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+C.$$

例2. 验证 $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ 在右半平面（ $x>0$ ）内存在原函数，并求出它.



证：令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \quad (x>0)$

可知存在原函数

$$U(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$= -\int_1^x 0\cdot dx + x\int_0^y \frac{dy}{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} \quad (x>0)$$

$$u(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + C \quad (x>0)$$

4、全微分方程

1).定义：若有全微分形式

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

全微分方程

则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$　　　(1)

判别：P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

(1) 为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,y)\in D$

2).求解步骤:

(1). 求原函数 $u(x,y)$

(2). 由 $du=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例1　求方程$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$的通解.

解　$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,　是全微分方程,

$$u(x,y)=\int_0^x x^3dx+\int_0^y (y^3-3x^2y)dy$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4},$$

原方程的通解为　$\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{y^4}{4}=C.$

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $du = Pdx + Qdy$

$\Longleftrightarrow$ $Pdx + Qdy = 0$ 为全微分方程