曲线积分习题课

一、　曲线积分

二、　格林公式及其应用

一、内容及要求

1、熟练掌握两类曲线积分的计算

(1)基本方法（直接计算）：

$$\text{曲线积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类（对弧长）}\\ \text{第二类（对坐标）}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{转化}}\text{定积分}$$

注意点：

$$\text{(1) 选择适当的曲线方程}\begin{cases}\text{用参数方程}\\ \text{用直角坐标方程}\\ \text{用极坐标方程}\end{cases}$$

$$\text{(2) 确定积分上下限}\begin{cases}\text{第一类:}\quad\text{下小上大}\\ \text{第二类:}\quad\text{下始上终}\end{cases}$$

(2)基本技巧

(1) 利用曲线方程、对称性及质心公式简化计算；

(2) 利用格林公式（注意加辅助线的技巧）；

(3) 利用积分与路径无关的等价条件;

(4) 利用原函数法;

(5) 利用两类曲线积分的联系公式．

二、典型例题

1、两类曲线积分的直接计算

例1、计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$,其中$L$为圆周 $x^2+y^2=a\,x$.

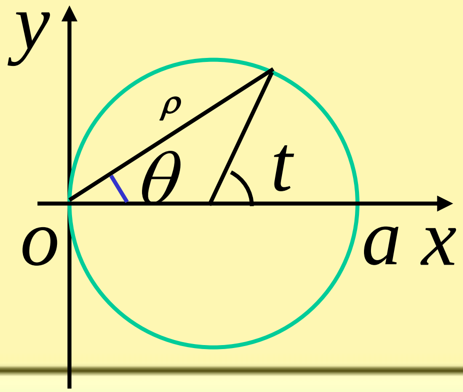
解：利用极坐标，$L:\rho=a\cos\theta\quad(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=a\,d\theta$$

原式 $=\int_L\sqrt{a\,x}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\cdot a\,d\theta=2a^2$

说明：若用参数方程计算,则

$$L:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}(1+\cos t)\\ y=\dfrac{a}{2}\sin t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$



$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\frac{a}{2}dt$$

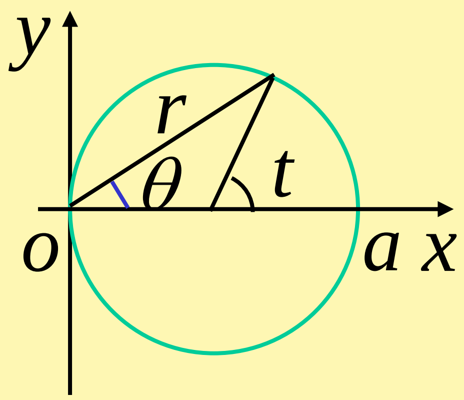
原式 $=\int_L \sqrt{ax}\,ds$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{1+\cos t}\cdot\frac{1}{2}a\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

$$\underline{\underline{\frac{t}{2}=u\quad}}\; a^2\int_0^{\pi}|\cos u|\,du$$

$$=a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u\,du\right]=2a^2$$



2、 填空

(1)已知 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, L的长度为a

$\oint_L[3x^2+4y^2-\sin(xy)]ds=$ 12a

解: $\oint_L(3x^2+4y^2)ds=\oint_L 12ds=12a.$

由对称性 $\oint_L\sin(xy)ds=0$

(2) 已知L为圆周$:(x-a)^2+y^2=a^2,\oint_L xds=$ ____

解$:\oint_L xds=\overline{x}\cdot 2\pi a=2\pi a^2$

或$:\oint_L xds=\int_0^{2\pi}(a+a\cos\theta)ad\theta=2\pi a^2$

(3) 设$f(x,y)$在$\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$具有连续的二阶偏导，L是椭圆的逆时针方向求$\oint_L [3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy$

解 利用格林公式

$$原式=\iint_D [f_{yx}-3-f_{xy}]dxdy$$

$$=-3\iint_D dxdy=-3\cdot 2\pi=-6\pi$$

3、利用格林公式与路径无关的条件计算曲线积分

例3 计算$I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中

L为上半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$逆时针方向的有向弧。

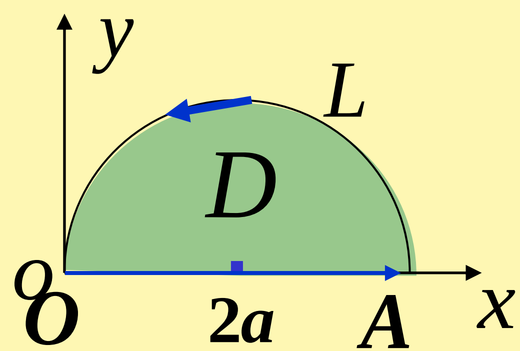
解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=b-a$ 添上$\overrightarrow{OA}$，利用格林公式

$$I=\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\iint_D (b-adxdy-\int_0^{2a}(-bx)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b$$



例4 证明积分$\int_L (e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$与路径无关。若$L$为以$A(0,0)$到$B(\frac{\pi}{2},\pi)$的任意简单曲线，计算积分的值。

解 易验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-e^x\sin y$

$$\text{原式}=\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}(e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x dx+\int_0^{\pi}(\frac{\pi^2}{2}y-e^{\frac{\pi}{2}}\sin y)dy$$

$$=-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^4}{4}-1$$

或：原式$=(e^x\cos y+x^2y^2)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}=-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^4}{4}-1$

例5 计算 $\oint_L \frac{(x^3+e^y)dx+(xe^y+y^3-8y)dy}{9x^2+4y^2}$

$L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 顺时针方向

解：L: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 即$9x^2+4y^2=36$

$$\oint_L = \frac{1}{36}\oint_L (x^3+e^y)dx+(xe^y+y^3-8y)dy$$

$$= -\frac{1}{36}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= -\frac{1}{36}\iint_D (e^y-e^y)dxdy = 0$$

注： 应充分利用L的方程简化被积函数。

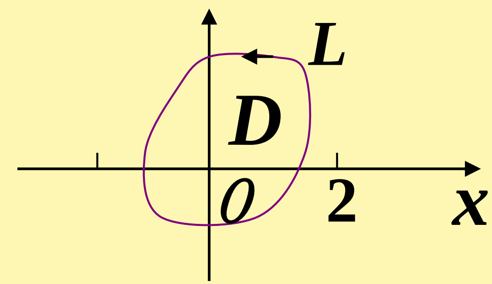
例6 设L是分段光滑的简单闭曲线,取正向,点（2，0）不在L上,计算

$$I=\oint_L \frac{y}{(2-x)^2+y^2}dx+\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}dy$$

解:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(2-x)^2-y^2}{[(2-x)^2+y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad ((x,\ y)\neq(2,\ 0))$$

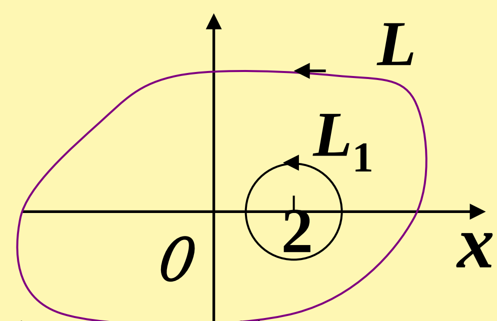
(1) 当(2，0)在L所围区域D外时



$$I=\oint_L \frac{y}{(2-x)^2+y^2}dx+\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

（2）当 (2，0) 在D内时

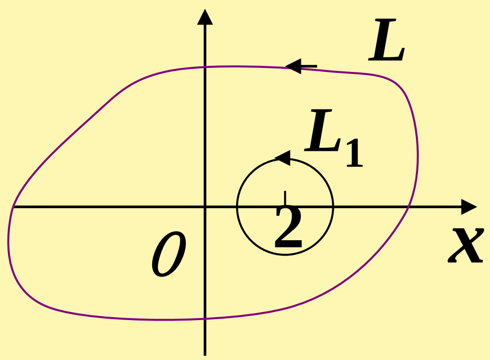


以(2，0)为圆心，充分小的正数ε为半径作圆L_1，取正向，则有：

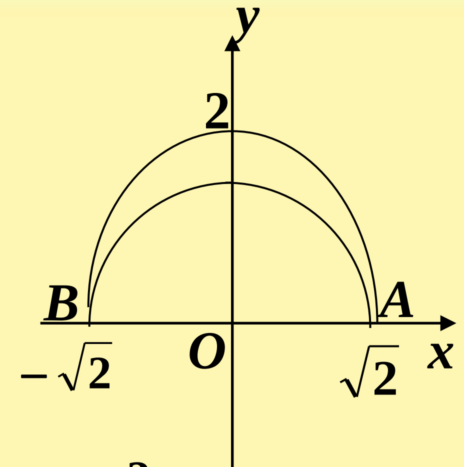
$$\oint_L = \oint_{L_1} = \oint_{L_1} \frac{y}{(2-x)^2+y^2}dx + \frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1} ydx + (2-x)dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D (-1-1)dxdy = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(-2)\pi\varepsilon^2 = -2\pi$$



例7 计算 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$



L：$y=2-x^2$上从$A(\sqrt{2}，0)$到$B(-\sqrt{2}，0)$的一段有向弧段。

解：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$

取l为$x^2+y^2=2$上从点$A(\sqrt{2}，0)$经上半圆到点$B(-\sqrt{2}，0)$的有向曲线，则

$$\int_L = \int_l$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)(-\sqrt{2}\sin\theta) + \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta}{2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

或

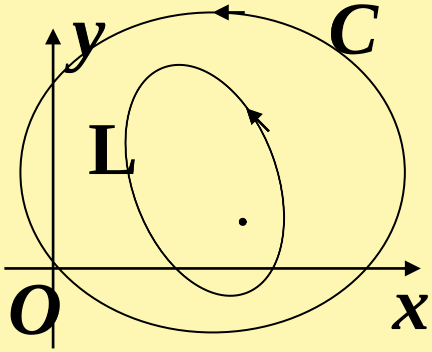
$$\int_L = \int_l = \frac{1}{2}\int_l (x-y)dx + (x+y)dy = \frac{1}{2}\oint_{l+\overline{BA}} - \frac{1}{2}\int_{\overline{BA}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D [1-(-1)]dxdy - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} (x-0)dx + 0$$

$$= \iint_D dxdy - 0 = \pi$$

注： 当$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$时

1、闭路积分 $\oint_C Pdx+Qdy=?$



（1）当（C上及）C内无奇异点时，

$$\oint_C Pdx+Qdy=0$$

（2）当C内有奇异点时，取新的与C同向的闭路L，

$$\oint_C Pdx+Qdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

2、开路积分 $\int_L Pdx + Qdy$

（1）选具有相同的起点和终点的“好路径”积分

常选取线段、折线、圆弧、椭圆弧等。

（2）利用原函数$u(x，y)$

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy = u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

4、综合题

例8 设$Q(x, y)$具有连续的一阶偏导数，曲线积分

$\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$与路径无关，且对$\forall t$，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy,$$

求$Q(x,y)$.

解：由积分与路径无关知 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

故 $Q(x,y) = x^2 + \varphi(y)$ 其中 $\varphi(y)$ 为待定函数。

取折线作为积分路径

左端$=\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+(x^2+\varphi(y))dy$

先积x $\int_0^t 0dx+\int_0^1 [t^2+\varphi(y)]dy \quad = t^2+\int_0^1 \varphi(y)dy$

右端$=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+(x^2+\varphi(y))dy \quad =\int_0^1 0dx+\int_0^t [1+\varphi(y)]dy$

$$=t+\int_0^t \varphi(y)dy$$

由题设有 $t^2+\int_0^1 \varphi(y)dy = t+\int_0^t \varphi(y)dy$

两端对t求导 $2t=1+\varphi(t), \varphi(t)=2t-1$

所以 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1$

例9 证明曲线积分$I=\int_L \cos(\vec{k},\vec{t})ds=0$,$L$为$xoy$平面上的任意简单闭曲线,$\vec{k}$为一常向量,$\vec{t}$是曲线$L$的单位切向量。

证明 设$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 则$\vec{t}=\{\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}},\frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}\}$

$$=\{\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$\cos(\vec{k},\vec{t})=\frac{\vec{k}\cdot\vec{t}}{|\vec{k}|\cdot|\vec{t}|}=\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$I=\int_L \cos(\vec{k},\vec{t})ds \quad =\oint_L \frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L adx+bdy$$ 利用格林公式:$I=0$

NJUPT

例10 已知平面区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$

L为D的正向边界，证明：

1). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$

2). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \ge 2\pi^2$

证明：1). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx$

$$= \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx = \text{右边}$$

或用格林公式：左边$= \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy$

右边$= \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})dxdy$

根据轮换对称：左边$=$右边

$$(2):\text{左边}=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$\geq 2\iint_D dxdy = 2\pi^2$$