9.3.1 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

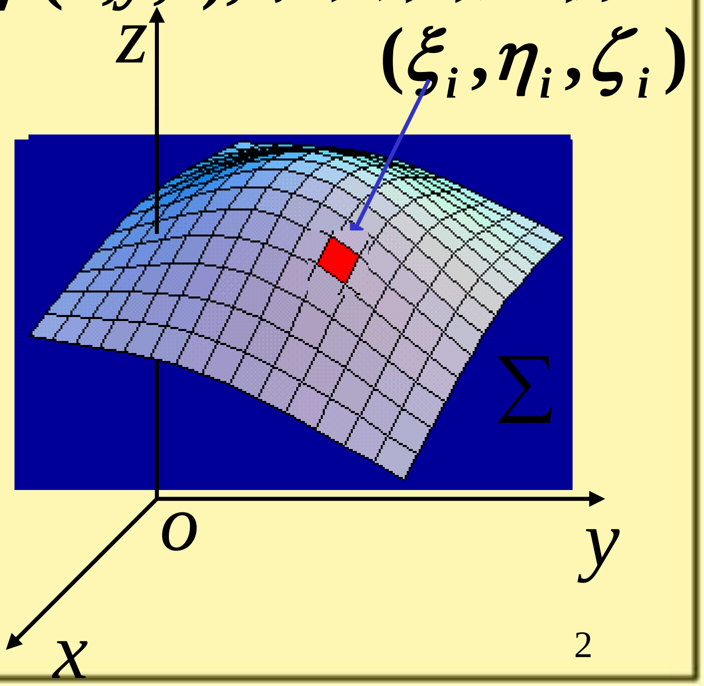
二、对面积的曲面积分的计算

9.3.1、对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

1．实例　　曲面型物件的质量

曲面型物件占有O-xyz空间中的曲面Σ(Σ光滑或分片光滑),且有连续的面密度为$\rho(x,y,z)$,求曲面型物件的质量。



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 λ是n个小曲面块的直径的最大值。

2、对面积的曲面积分的定义

定义9.3.1 设曲面Σ是光滑的有限曲面，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界。若对Σ做任意分割和局部区域任意取点，“乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

都存在,则称此极限为函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分 或第一类曲面积分.

其中$f(x, y, z)$叫做被积函数，Σ叫做积分曲面。

3、几点说明

(1) 积分的存在性:若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续,

则对面积的曲面积分存在.

(2) 曲面型物件的质量为 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$

曲面面积为 $S=\iint\limits_{\Sigma}dS$

4、对面积的曲面积分的性质

具有对弧长曲线积分同样的性质。

（1）关于被积函数的线性性质

设k_1, k_2为常数,则

$$\iint_\Sigma [k_1 f(x,y,z) + k_2 g(x,y,z)]dS$$
$$= k_1 \iint_\Sigma f(x,y,z)dS + k_2 \iint_\Sigma g(x,y,z)dS$$

（2）关于积分曲面的可加性

若 Σ是光滑的， 例如分成两 片光滑曲面Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

（3）关于被积函数的不等式性质

（4）估值定理　　　（5）积分中值定理

5、对称性的应用

(1) 若曲面Σ关于xoy面对称，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

$$=\begin{cases} 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,-z)=f(x,y,z) \end{cases}$$

Σ_1是Σ在上半平面的部分.

曲面Σ关于xoz, yoz面对称有类似的结论

(2) 若 Σ关于变量x，y，z具有轮换对称性，则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma} f(y,z,x)dS = \iint_{\Sigma} f(z,x,y)dS$$

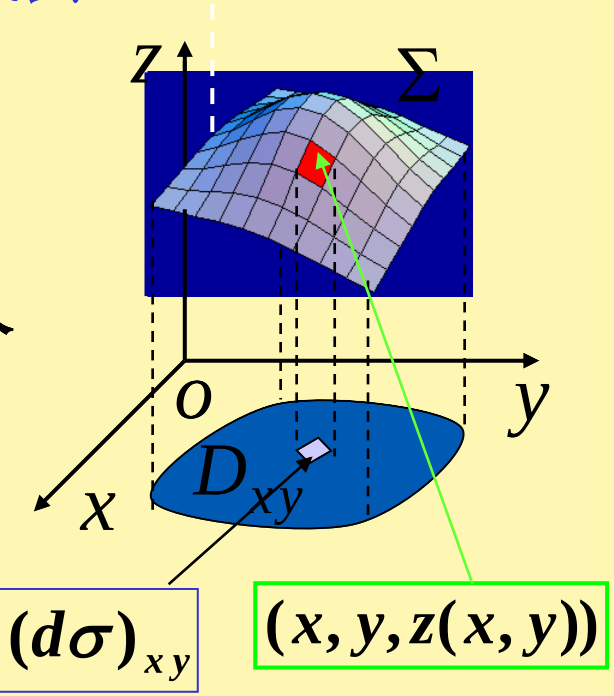
$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]dS$$

若Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$则

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}[x^2+y^2+z^2]dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{4}{3}\pi R^4$$

二、对面积的曲面积分的计算法



定理9.3.1： 设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$在Σ上连续，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 存在，且有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} \, dxdy$$

计算方法可概括为"一代、二换、三投影"

说明

（1）计算方法可概括为“一代、二换、三投影”

“一代”　将$z=z(x,y)$代入被积函数$f(x,y,z)$，得$f[x,y,z(x,y)]$；

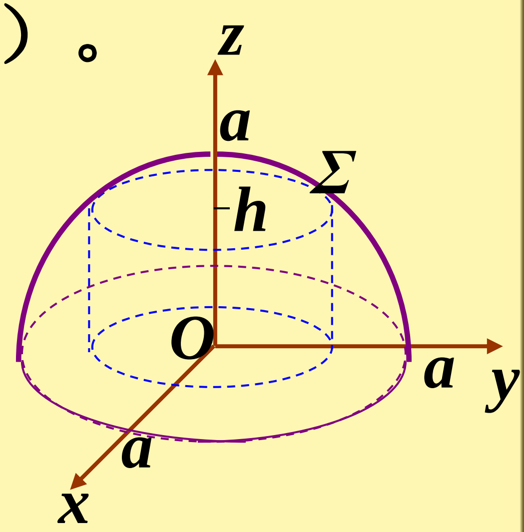
“二换”将dS换成相应的曲面面积元素的表达式：

如Σ：$z=z(x,y)$，则 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

“三投影”认清Σ在xoy平面上的投影区域D_{xy}

（2）如Σ：$x=x(y,z)$，此时投影区域D_{yz}；
如Σ：$y=y(x,z)$，此时投影区域为D_{zx}。

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部（如图）。



解： Σ 的方程为 $$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

D_{xy} $x^2+y^2\le a^2-h^2$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

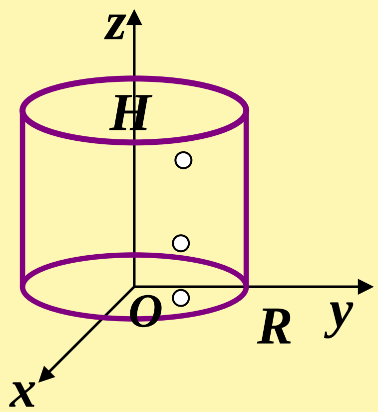
根据公式，有 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}$$

利用极坐标，得

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{a\rho d\rho d\theta}{a^2 - \rho^2} = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} d\rho$$

$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2 - \rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}} = 2\pi a \ln\frac{a}{h}.$$

例2 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$



Σ是介于$z=0$及$z=H(H>0)$之间的柱面$x^2+y^2=R^2$

解法一：在 Σ上有$x^2+y^2=R^2$，所以 $\displaystyle I=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{R^2+z^2}$

又Σ关于平面$x=0$对称，

$\dfrac{1}{R^2+z^2}$关于变量x为偶函数

所以 $\displaystyle I=2\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{R^2+z^2},$

其中　$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$（$-R\leqslant y\leqslant R$，$0\leqslant z\leqslant H$）

$$dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

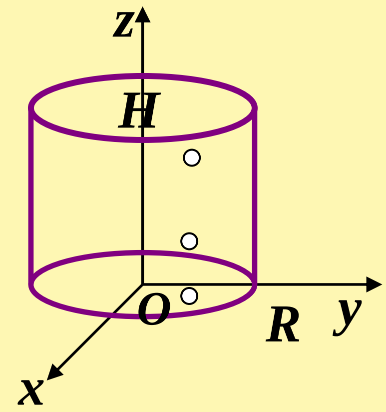
于是　$$I=2\iint_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

$$=2R\int_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}\cdot\int_{-R}^R\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$=2\arctan\frac{H}{R}\cdot 2\arcsin\frac{R}{R}=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

解法二：用垂直于z轴的平面去截Σ

$$dS = 2\pi R dz$$



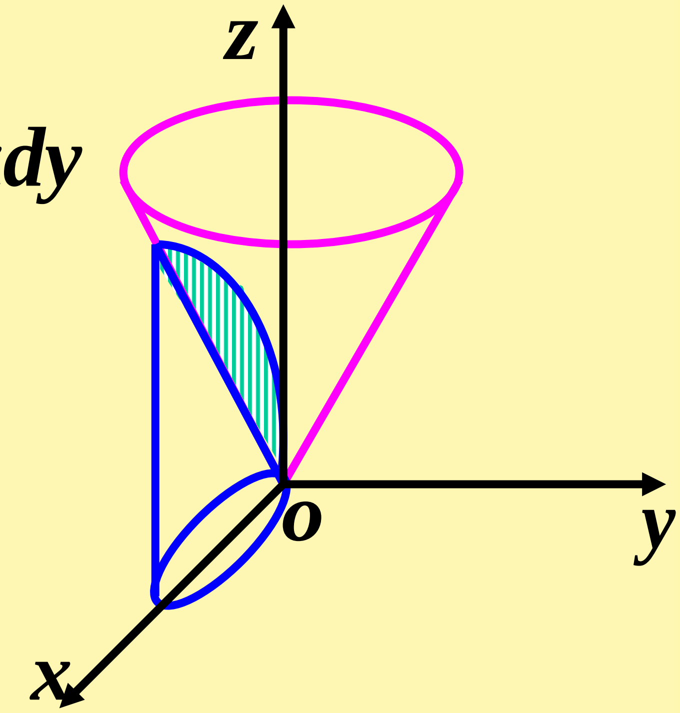
$$I = \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} \cdot 2\pi R dz$$

$$= 2\pi \arctan \frac{z}{R}\Big|_0^H = 2\pi \arctan \frac{H}{R}$$

例3 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$ 其中 Σ：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）割下的部分

解：D_{xy}： $x^2+y^2\leqslant 2ax$，

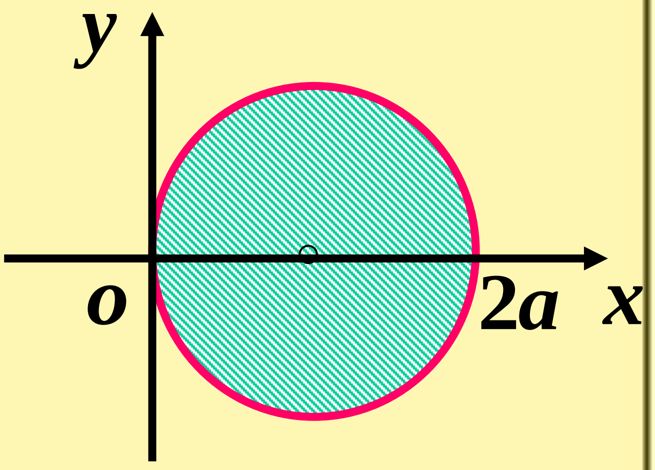
$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$$



因为 Σ 关于 xoz 面对称，$xy+yz$ 是 y 的奇函数，所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz)dS=0$$

$$I = 0 + \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$



$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta \cdot \rho \cdot \rho d\rho$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \frac{1}{4}(2a\cos\theta)^4 d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta d\theta = 8\sqrt{2}a^4 \cdot \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

注:对面积的曲面积分的应用

曲面型物件占有O-xyz空间中的曲面Σ(Σ光滑或分片光滑),且有连续的面密度为$\rho(x,y,z)$

质心

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} y\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS},$$

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} z\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS},$$

转动惯量

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS$$

$$I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS$$

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dS$$

小结

本节主要学习了对面积的曲面积分的概念,以及对面积的曲面积分的计算方法。

本节要求理解对面积的曲面积分的概念,了解曲面积分的性质,熟练掌握对面积的曲面积分的计算。

习题　　9.3.1