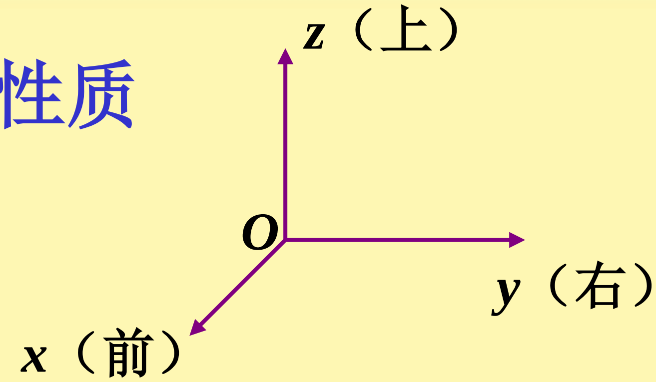
9.3.2 对坐标的曲面积分

一、对坐标的曲面积分的概念与性质

二、对坐标的曲面积分的计算

三、两类曲面积分之间的联系

一、对坐标的曲面积分的概念与性质



1. 有向曲面

（1）曲面的侧

常见的曲面都是双侧的。

Σ：$z=f(x, y)$，$(x, y)\in D_{xy}$ 上侧、下侧

Σ：$x=g(y, z)$，$(y, z)\in D_{yz}$ 前侧、后侧

Σ：$y=h(z, x)$，$(z, x)\in D_{zx}$ 右侧、左侧

Σ：$x^2+y^2+2z^2=1$ 外侧、内侧

曲面侧的取定可通过曲面的法向量的方向的选定而定出

（2）有向曲面

这种取定了法向量亦即选定了侧的曲面叫做有向曲面。

（3）有向曲面在坐标平面上的投影

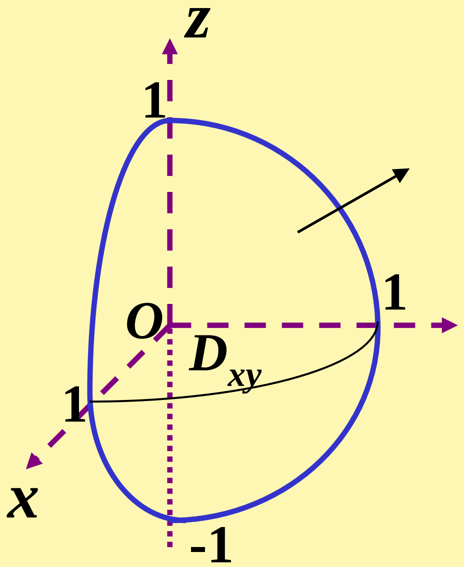
设Σ是有向曲面。在Σ上取一小块曲面$\varDelta S$，把$\varDelta S$投影xOy面上得一投影区域，这投影区域的面积记为$(\Delta\sigma)_{xy}$。假定$\varDelta S$上各处的法向量与z轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号（即$\cos\gamma$都是正的或都是负的）。我们规定$\varDelta S$在xOy面上的投影$(\varDelta S)_{xy}$为

$$(\varDelta S)_{xy}=\begin{cases}(\varDelta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0,\\ -(\varDelta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0,\\ 0, & \cos\gamma\equiv 0\end{cases}$$

注:（1） $\varDelta S$在xOy面上的投影$(\varDelta S)_{xy}$ 实际就是$\varDelta S$在xOy面上的投影区域的面积附以一定的正负号。

(2)类似地可以定义$\varDelta S$在yOz面及zOx上的投影$(\varDelta S)_{yz}$ 及 $(\varDelta S)_{xz}$ 。

(3) 小曲面块ΔS往某坐标平面上投影时，ΔS上各点的法向量的相应的方向余弦应保号（否则应对ΔS再分块）。



例:球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

上$x\geqslant0$、$y\geqslant0$的部分，取球面外侧。

$$\Sigma_1 \quad z_1=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\Sigma_2 \quad z_2=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

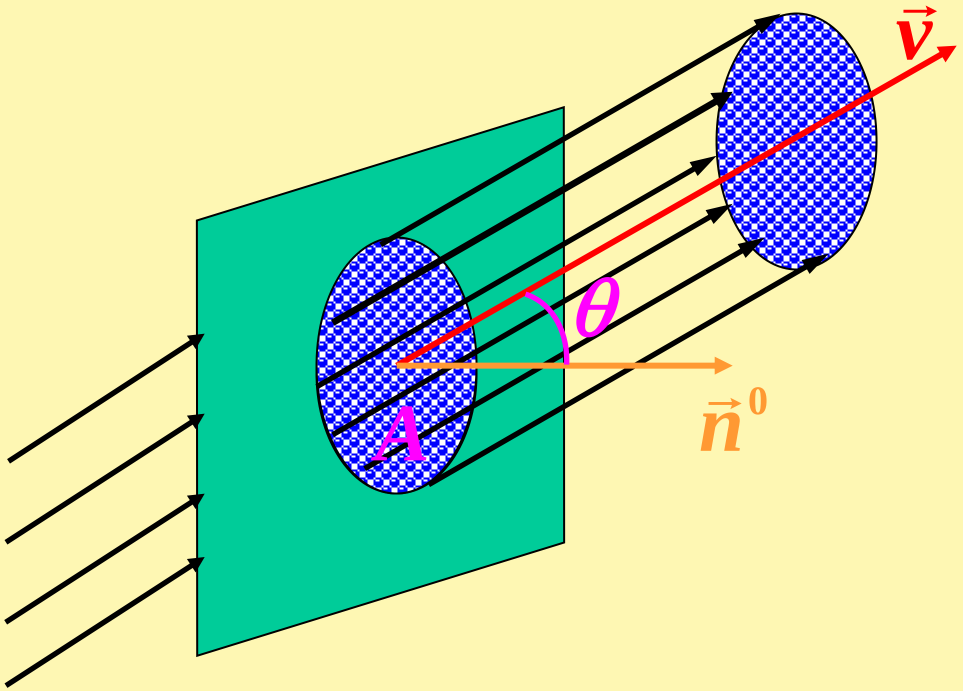
Σ_1在xoy面上的投影为：D_{xy} $x^2+y^2\leq1$的面积

Σ_2在xoy面上的投影为：D_{xy}的面积的负值

NJUPT

2　实例：流向曲面一侧的流量.

（1）　流速场为常向量 $\vec{v}$ ，有向平面区域 A, 求单位时间流过 A 的流体的质量Φ（假定密度为 1）.



流量

$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta$$

$$= A\vec{v}\cdot\vec{n}^0$$

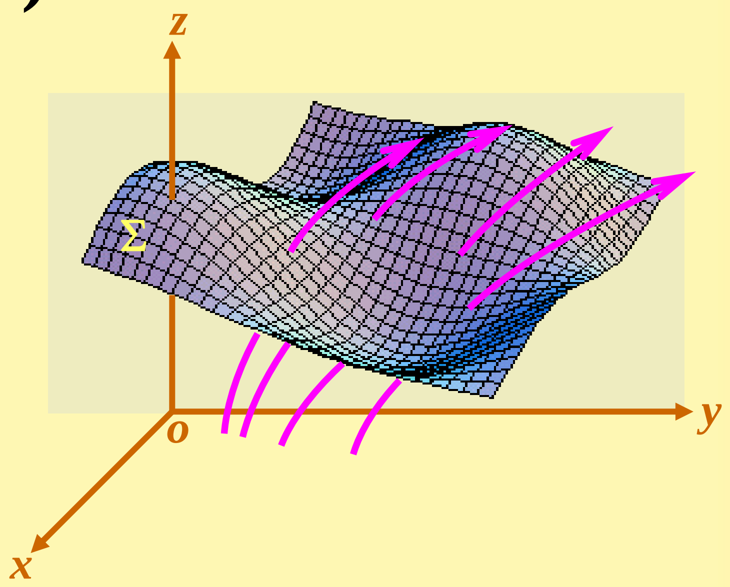
(2)　设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

给出, Σ 是速度场中的一片有向曲面, 函数

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$

都在 Σ 上连续, 求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量 Φ.



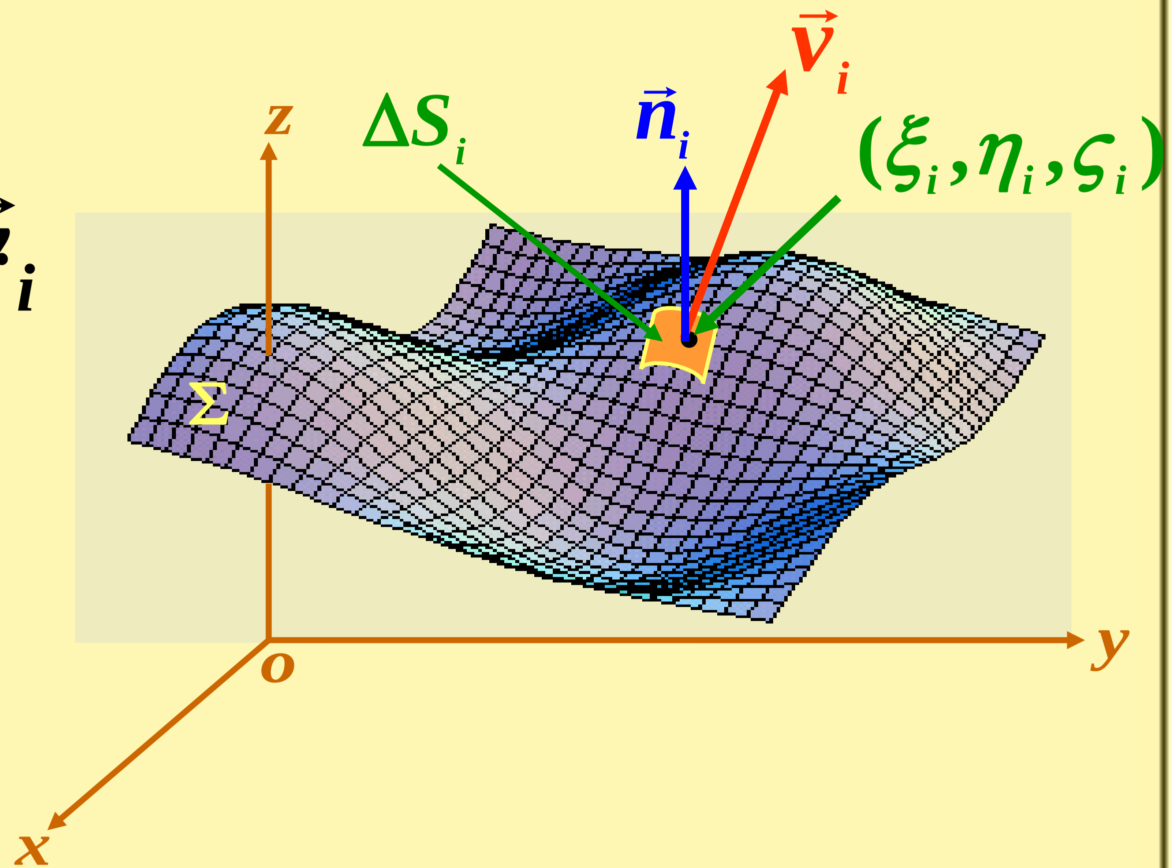
1. 分割　　把曲面 Σ 分成 n 小块 Δs_i (Δs_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积),

在 Δs_i 上任取一点

(ξ_i, η_i, ζ_i),

则该点流速为 $\vec{v}_i$

法向量为 $\vec{n}_i$



$$\vec{v}_i = v(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

$$= P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{k},$$

该点处曲面Σ的单位法向量

$$\vec{n}_i^0 = \cos\alpha_i\vec{i} + \cos\beta_i\vec{j} + \cos\gamma_i\vec{k},$$

2. 近似 通过Δs_i流向指定侧的流量的近似值为

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{n_i}^0 \Delta S_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

$$= [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+ R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

3. 求和 通过Σ流向指定侧的流量 $\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{n_i}^0 \Delta S_i$

$$=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

$$+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

4\. 取极限　$\lambda\to 0$ 取极限得到流量Φ的精确值.

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

$$+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

3. 对坐标的曲面积分的定义

定义 设Σ为光滑的有向曲面，函数$R(x, y, z)$在Σ上有界。把Σ任意分成n块小曲面ΔS_i（ΔS_i同时又表示第块小曲面的面积），ΔS_i在xOy面上的投影为$(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i, η_i, ζ_i) 是ΔS_i上任意取定的一点。如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda \to 0$时，

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$ 总存在，

则称此极限为函数$R(x, y, z)$在有向曲面Σ上对坐标x、y的曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dxdy$$

即 $\iint\limits_{\Sigma} \underline{R(x,y,z)}dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

被积函数

积分曲面

类似可定义

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

3 说明:

(1) 存在条件:

当$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma$上连续时, 对坐标的曲面积分存在.

(2) 组合形式:

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

(3) 物理意义:

例如，上述流向Σ指定侧的流量Φ可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

4. 性质

（1）关于被积函数的线性性质

（2）关于 Σ 的可加性

如 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$（方向一致），则 $\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}$

（3）方向性 $\iint\limits_{-\Sigma}=-\iint\limits_{\Sigma}$

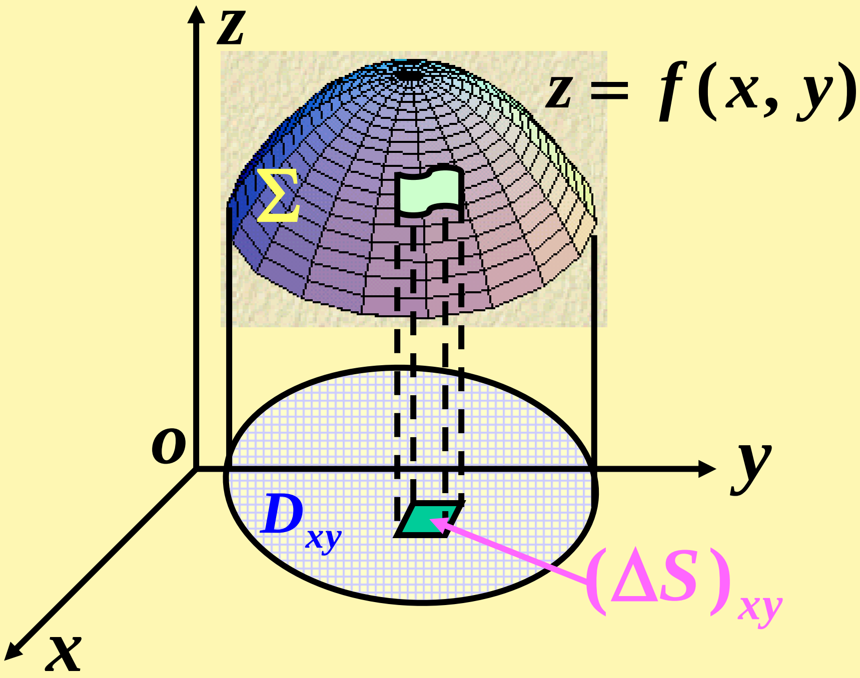
即 $$\iint\limits_{-\Sigma}P(x,y,z)dydz=-\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{-\Sigma}Q(x,y,z)dzdx=-\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx$$

$$\iint\limits_{-\Sigma}R(x,y,z)dxdy=-\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$$

二、对坐标的曲面积分的计算方法

1　计算公式



设积分曲面 Σ是由方程$z=z(x, y)$所给出的曲面上侧，

Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，

函数$z=z(x, y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$R(x, y, z)$在 Σ上连续。

按对坐标的曲面积分的定义，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$\because \Sigma$取上侧, $\cos\gamma > 0$, $\quad \therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma)_{xy}$,

又 $\because \zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$

$$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

即 $\displaystyle\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = +\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$

若Σ取下侧, $\cos\gamma < 0$, $\quad \therefore (\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma)_{xy}$,

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

如果Σ由$x = x(y,z)$给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

前侧→正号，　后侧→负号，

如果Σ由$y = y(z,x)$给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

右侧→正号，左侧→负号。

注意:对坐标的曲面积分,必须注意曲面所取的侧.

计算方法可概括为：“一代、二定、三投影”

“一代”　曲面方程代入被积函数；

“二定”　即选取正负号

“三投影”　给出Σ在相应坐标平面上的投影区域。

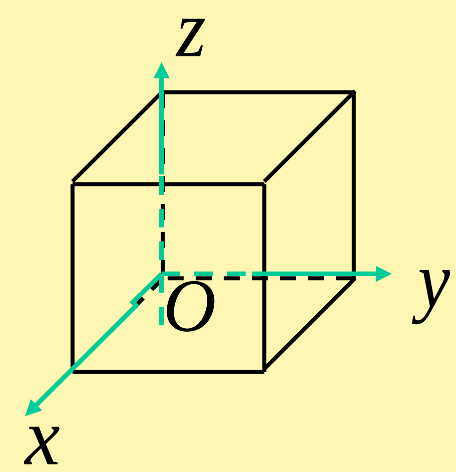
2．计算举例

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,

其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧,

$\Omega=\{(x, y, z) \mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c\}$。

解: 把有向曲面 Σ 分成以下六部分:



Σ_1: $z=c(0\le x\le a, 0\le y\le b)$ 的上侧;

Σ_2: $z=0(0\le x\le a, 0\le y\le b)$ 的下侧;

Σ_3: $x=a(0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的前侧;

Σ_4: $x=0(0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的后侧;

Σ_5: $y=b(0\le x\le a, 0\le z\le c)$ 的右侧;

Σ_6: $y=0(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant c)$ 的左侧;

除Σ_3、Σ_4外，其余四片曲面在yOz面上的投影为零，因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \iint_{\Sigma_3} x^2 dydz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dydz$$

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \iint_{D_{yz}} a^2 dydz - \iint_{D_{yz}} 0^2 dydz = a^2 bc$$

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} y^2 dzdx = b^2 ac, \qquad \iint_{\Sigma} z^2 dxdy = c^2 ab.$$

于是所求曲面积分为$(a+b+c)abc$。

例 2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$,

其中 Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$的部分

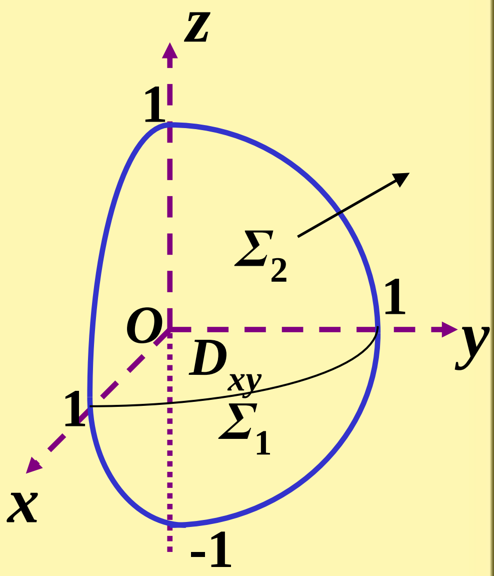
解： 把Σ分为Σ_1和Σ_2两部分

Σ_1的方程为

$$z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2},\quad \text{取下侧}$$

Σ_2的方程为

$$z_2=\sqrt{1-x^2-y^2}\quad \text{取上侧}$$



$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy+\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

其中D_{xy}: $x^2+y^2\le 1$（$x\ge 0$，$y\ge 0$）

$$2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

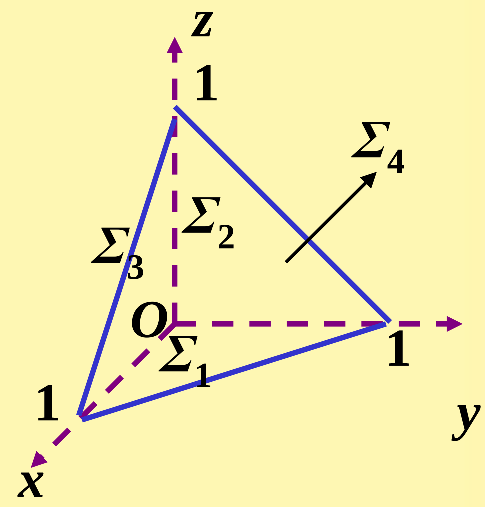
$$\underline{\underline{\rho=\sin t}}\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^3 t-\sin^5 t]dt = \frac{2}{15}.$$

例3 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy,$

其中 Σ为平面$x+y+z=1$，与三坐标 平面所围

立体的表面，取外侧



解: $I=\oiint\limits_{\Sigma}=\sum\limits_{k=1}^{4}\iint\limits_{\Sigma_k}$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=0+0+\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-\frac{1}{2}$$

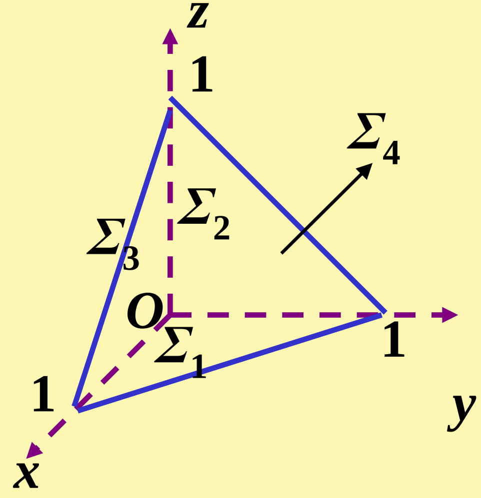
$$\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{\Sigma_2}(x+1)dydz+0+0=-\iint\limits_{D_{yz}}(0+1)dydz=-\frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}=0+\iint\limits_{\Sigma_3}ydzdx+0=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_4} = +\iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z+1)dydz+\iint\limits_{D_{zx}}(1-z-x)dzdx+\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-z)dz+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-2-x)dz+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$



$$I=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

三、两类曲面积分之间的联系

1．设有向曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$在Σ上连续。如果Σ取上侧，则由对坐标的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

另一方面，因上述有向曲面Σ的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

由此可见，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS. \qquad (1)$$

如果Σ取下侧，则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

但这时 $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，因此（1）式仍成立。

类似可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS. \quad （2）$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS \quad （3）$$

合并（1）、（2）、（3）三式，得两类曲面积分之间的如下关系：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是有向曲面Σ上点（x，y，z）处的法向量的方向余弦。

若记$\vec{A}=\{P,Q,R\}$, $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

$d\vec{S}=\vec{n}dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$ —— 有向曲面元

两类面积分之间的关系可记为

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

例4 把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

化成对面积的曲面积分，其中 Σ：是$z = 8-(x^2+y^2)$

在xOy面上方部分的上侧

解： $\vec{N} = \{-z_x, -z_y, 1\} = \{2x, 2y, 1\}$

$$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

$$= \left\{\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right\}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS$$

2. 利用两类曲面积分之间的联系计算对坐标的曲面积分 （投影转换）

设 Σ：$z=z(x, y)$，取上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma} \vec{A}\cdot \vec{n}dS$

$$\vec{N}=\{-z_x,-z_y,1\}$$

$$\vec{n}=\left\{\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right\}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy,$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{\frac{-z_xP-z_yQ+R}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[-z_xP-z_yQ+R]dxdy=\iint_{D_{xy}}\vec{A}\cdot\vec{N}dxdy$$

$$\vec{A}=\{P,Q,R\}$$

如取下侧，则 $\vec{N}=\{z_x,z_y,-1\}$ 上式仍成立。

结论： 设∑：$z=z(x，y)$，令 $\vec{N}=\pm\{-z_x,-z_y,1\}$

"上正下负" 则有

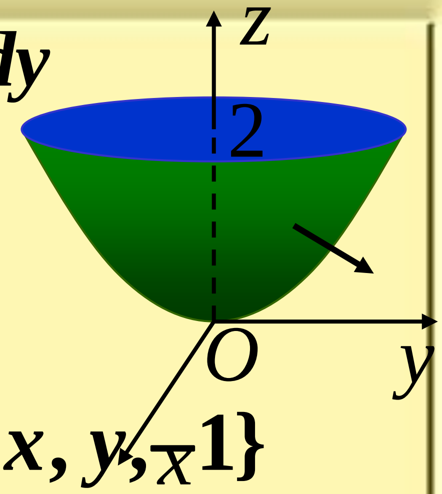
$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint_{D_{xy}}\vec{A}\cdot\vec{N}dxdy$$

例5 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

介于平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分的下侧



解：D_{xy}：$x^2+y^2\le 4$， $\vec{N}=\{z_x,z_y,-1\}=\{x,y,-1\}$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}[(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x(x+z^2)+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=0+\iint\limits_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$\overset{\text{轮换对称}}{=}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho=8\pi$$

利用投影转换计算: $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$

解：D_{xy}：$x^2+y^2\leq 4$， $\overrightarrow{N}=\{z_x, z_y, -1\}=\{x, y, -1\}$

$$\overrightarrow{A}=\{z^2+x, 0, -z\}=\{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x, 0, -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}$$

于是 $$I=\iint\limits_{D_{xy}}[\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=0+\iint\limits_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$\xlongequal[\text{对称}]{\text{轮换}}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho=8\pi$$

这种方法称为“投影转换法”或“向量点积法”

本质上是两类曲面积分之间的联系的应用。

例6 前面的例3中我们用“投影转换法”计算$\iint\limits_{\Sigma_4}$

计算 $\iint\limits_{\Sigma_4}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy,$

其中Σ_4为平面$x+y+z=1$取外侧

解：Σ_4：$z=1-x-y$，取上侧

$$\vec{N}=\{-z_x,-z_y,1\}=\{1,1,1\}$$

D_{xy}：$0\le y\le 1-x$，$0\le x\le 1$

$$\iint\limits_{\Sigma_4}=\iint\limits_{D_{xy}}(x+1+y+1)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(2+x+y)dy=\cdots=\frac{4}{3}.$$

对坐标的曲面积分计算方法

1、直接计算：“一代二定三投影”化为二重积分计算。

$\sum$：$z=z(x,y)$时，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

上正下负

$\Sigma:$由$x = x(y,z)$给出，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

前正后负

$\Sigma:$由$y = y(z,x)$给出，则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

右正左负

2．利用两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

3．投影转换法（法2的改进）

若∑：$z=z(x, y)$，$(x, y) \in D_{xy}$，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{D_{xy}} \vec{A} \cdot \vec{N} dxdy.$$

其中 $\vec{A} = \{P, Q, R\}, \vec{N} = \pm\{-z_x, -z_y, 1\}$ 上正下负

4．高斯公式

习题9.3.2