9.4　高斯公式、通量与散度

9.4.1、高斯公式

9.4.2、通量与散度

9.4.1、高斯公式

1. 高斯公式

定理9.4.1　设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，函数$P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \qquad (1)$$

或
$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \qquad (1')$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ上点(x, y, z)处的外法向量的方向余弦。公式（1）或（$1'$）叫做高斯公式。

证明 (1)先证: $\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_\Sigma R dxdy$

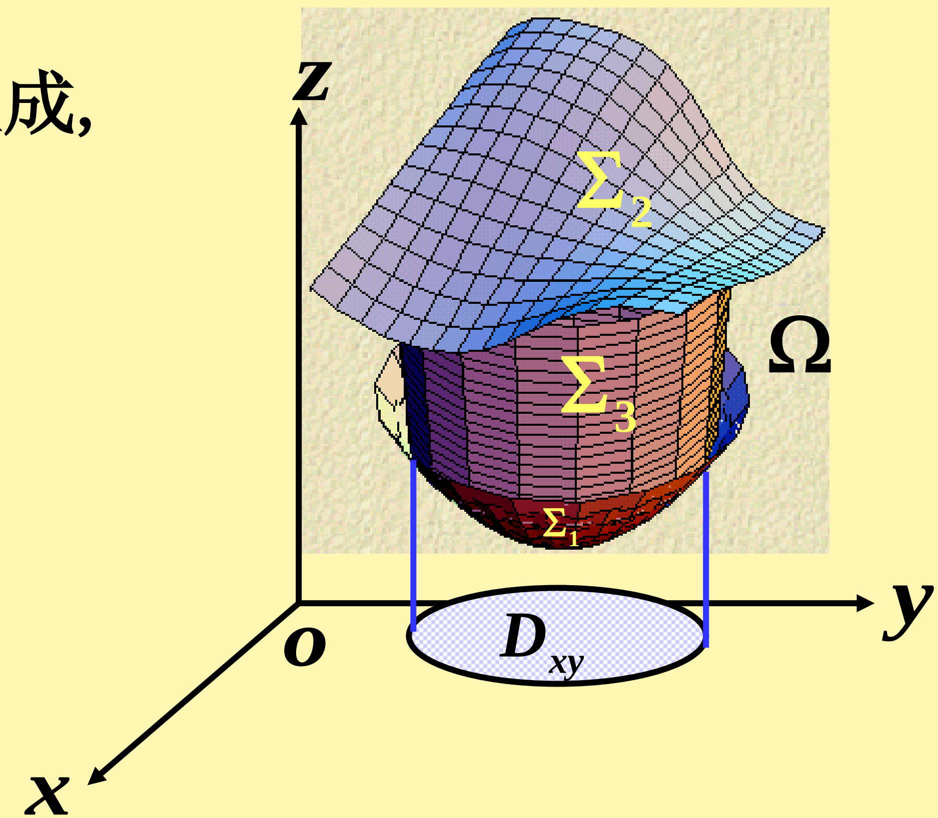
设: $\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$

Σ由Σ_1, Σ_2和Σ_3三部分组成,

Σ_1: $z = z_1(x,y)$

Σ_2: $z = z_2(x,y)$

Σ_3为柱面上的一部分



这里Σ_1取下侧, Σ_2取上侧, Σ_3取外侧.

根据三重积分的计算法

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\iint_{D_{xy}}\{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy.$$

根据曲面积分的计算法

$$\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_3}R(x,y,z)dxdy=0.$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy,$$

$$\therefore \quad \iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\oiint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy.$$

同理 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}dv=\oiint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz,$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}dv=\oiint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx,$$

和并以上三式得:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

-------------------高斯公式

由两类曲面积分之间的关系知高斯公式的另一种形式：

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

（2）如穿过 Ω 内部且平行于坐标轴的直线与 Σ 的交点多于两个时，采用分块的方法...

（3）若 Ω 为复连通区域,高斯公式仍成立.

Ω 的边界曲面的正向：外层取外侧，内层取内侧。

Gauss公式的实质

表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

2. 关于高斯公式的说明

（1）高斯公式成立的条件： Σ光滑或分片光滑的封闭曲面，P、Q、R在 Ω上一阶偏导连续。

（2）Σ不闭合时，采取“补面”的方法： $\Sigma+\Sigma_1$封闭，所围区域 Ω。

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \text{ 及} \iint\limits_{\Sigma_1}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}\text{易计算。}$$

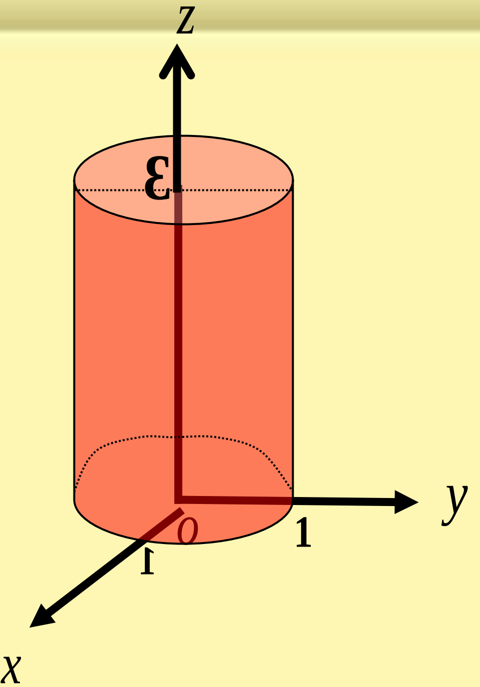
（3）若所围区域 Ω内有奇点, 则采用挖洞。

二　例题

例1　计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中Σ为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围成的空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧.



解　原式$=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz \underline{\underline{\text{对称性}}} \iiint_{\Omega}-zdxdydz$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^3 z\rho dz=-\frac{9\pi}{2}.$$

或　原式$=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz \underline{\underline{\text{对称性}}} \iiint_{\Omega}-zdxdydz$

$$=\int_0^3 -z(\pi\cdot 1^2)dz=-\frac{9\pi}{2}.$$

例 2 计算曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$, 其中$\Sigma$为

锥面 $x^2 + y^2 = z^2$介于平面

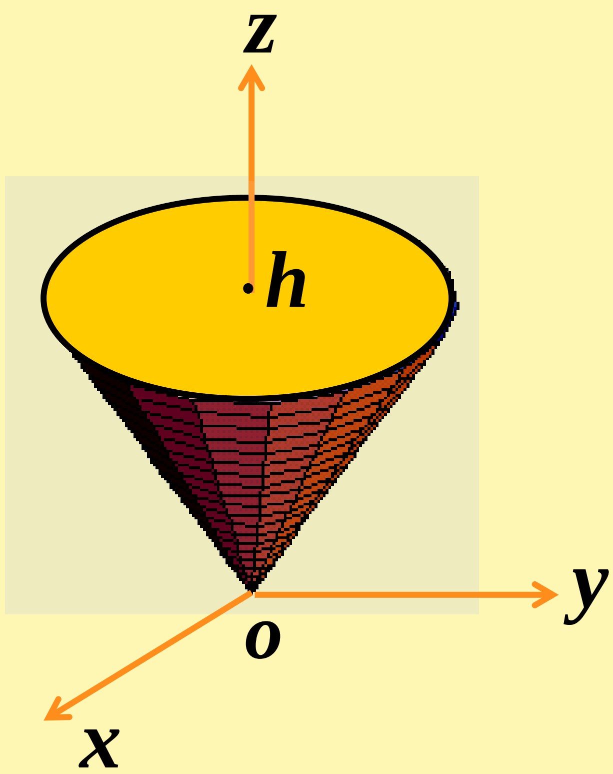
$z = 0$及$z = h(h > 0)$

之间的部分的下侧,

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

是Σ在(x, y, z)处

的法向量的方向余弦.



注：根据两类曲面积分之间的关系，此题一般以下列形式出现

例2 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

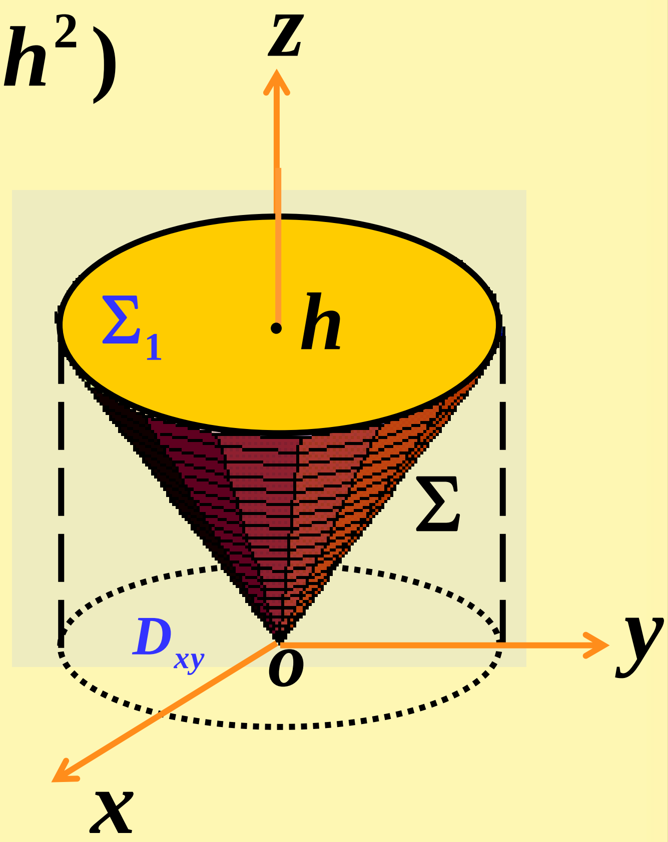
Σ为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$介于平面 $z = 0$及$z = h(h > 0)$的下侧

解 补充Σ_1： $z = h\,(x^2 + y^2 \le h^2)$

Σ_1取上侧，

$\Sigma + \Sigma_1$构成封闭曲面，

$\Sigma + \Sigma_1$围成空间区域Ω.



$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega}(x + y + z)dv$$

$$= 2\iiint_{\Omega}(x + y + z)dv$$

根据对称性可知

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{h} \rho d\rho\int_{\rho}^{h} zdz = \frac{1}{2}\pi h^4 .$$

$$\iint_{\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} h^2dxdy = \pi h^4 .$$

故所求积分为 $\iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4 .$$

例3 计算$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$

Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$的上侧

解 补面Σ_1:, $z=0, x^2+y^2\leq R^2$, 取下侧。

则 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$

$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2dr=\dfrac{6\pi R^5}{5}$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$ 原式$=\dfrac{6}{5}\pi R^5$

例4.计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

(1) $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

(2) $\Sigma: 2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧

(1)解　原式$=\dfrac{1}{R^3}\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint\limits_{\Omega}3dv$$

$$=\frac{3}{R^3}\frac{4\pi R^3}{3}=4\pi$$

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$ 由对称性知

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{z^2+x^2-2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

所以除原点外处处有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

作$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，取外侧

$$原式=\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=4\pi$$

9.4.2、通量与散度

1. 通量的定义:

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数,

沿场中某一有向曲面Σ的第二类曲面积分为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

称为向量场$\vec{A}(x,y,z)$穿过曲面Σ向着指定侧的**通量**.

2. 散度的定义:

设有向量场$\vec{A}(x,y,z)$, 在场内作包围点 M 的闭曲面Σ, Σ 包围的区域为 V, 记体积为 V. 若当 V 收缩成点M 时,

$$\text{极限}\lim_{V\to M}\frac{\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}}{V}\text{存在,}$$

则称此极限值为$\vec{A}$ 在点M 处的**散度**, 记为$div\vec{A}$.

散度在直角坐标系下的形式

根据高斯公式 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

积分中值定理, $\displaystyle\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{(\xi,\eta,\zeta)}$

两边取极限, $\displaystyle\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

$$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式可写成 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{\Omega}div\vec{A}dv$

其中Σ是空间闭区域Ω的边界曲面的外侧

例 1　已知向量 $A=x^2i+y^2j+z^2k$，Σ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$的全表面，求（1）div$A$ (2)求A穿过曲面 Σ而流向其外侧的通量

解：$$(1)div\vec{A}=2x+2y+2z$$

$$(2)\Phi=\oiint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}A dv=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dV$$

$$=0+0+2\iiint_{\Omega}zdv=2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^h zdz=\pi a^2h^2$$

内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式:

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

2．通量与散度

通量（流量）

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

散度 $$\mathrm{div}\,A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式可记作 $$\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\vec{A}dv$$

习题9.4